Nom :	**DS 02**	TS6 2018	Oct. 2017
Prénom :		Devoir n° 06	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 — 4 points

4 pts **Une équation ?**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x - 6$.

1 Etudier les variations de f .
La fonction f est un polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x^2 + 5$
signe de la dérivée : pour tout réel x on a $x^2 \geq 0$, on déduit donc $3x^2 + 5 > 0$.

La fonction dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
Variation de f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

2 En déduire que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
puis en donner une valeur approchée au centième à l'aide de la calculatrice.
f est continue car dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$,
f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.
f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Donc l'équation } f(x) = 0 \text{ a une racine unique } \alpha \text{ dans l'intervalle } \mathbb{R}.}$$

3 Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. On détaillera la démarche.
Encadrons α :
Avec une calculatrice on obtient : $f(1.11) \approx -0.08$ et $f(1.12) \approx 0.0049$
Ainsi $f(1.11) < f(\alpha) < f(1.12)$,
on en déduit $1.11 < \alpha < 1.12$, car f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Une valeur approchée de } \alpha \text{ au centième près par défaut est donc } 1.11 \text{ .}}$$

Exercice 2 — 1 point

1 pt **ROC**

On donne l'inégalité de Bernoulli :soit $a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1 + na$.
Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, diverge vers $+\infty$.

Comme ici $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + a$ où $a > 0$.
D'après l'inégalité de Bernoulli :

$$\begin{aligned}(1+a)^n &\geqslant 1+na\\ q^n &\geqslant 1+na\end{aligned}$$

Comme ici $a > 0$; on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$, et donc d'après le théorème de minoration, on déduit :

$$\boxed{\text{Si } q > 1, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty}$$

Exercice 3 — 4 points

4 pts **Récurrence**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n}$.

1 **a.** Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$.
Démontrons par récurrence sur n :

$$\mathcal{P}(n) : 1 \leq u_n \leq 2$$

♡ **Initialisation :** Au rang 0 on a $u_0 = 2$ et $1 \leq 2 \leq 2$ donc la propriété est vraie au rang 0.
♡ **Transmission de l'hérédité :** soit $k \geq 0$, on suppose que la propriété est vraie au rang k et on montre qu'elle est vraie au rang $k+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$1 \leq u_k \leq 2$$

Enappliquant la fonction racine carrée strictement croissante sur$\mathbb{R}^+$:

$$\begin{array}{rl} 1 \leq u_k \leq 2 & \\ 0 < 2 \leq 1 + u_k \leq 3 & \text{en ajoutant 1} \\ \frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+u_k} \geq \frac{1}{3} & \text{en appliquant la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ strictement décroissante sur }]0;+\infty[\\ \frac{3}{2} \geq 1 + \frac{1}{1+u_k} \geq \frac{4}{3} & \text{en ajoutant 1} \\ 1 \leq \frac{4}{3} \leq u_{k+1} \leq \frac{3}{2} \leq 2 & \end{array}$$

Ceci prouve la transmission de l'hérédité.

♡ **Conclusion :**$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Pour $k \geq 0$; $\mathcal{P}(k)$ vraie entraîne $\mathcal{P}(k+1)$ vraie.

Ainsi, le principe de récurrence s'appliquant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n > 1$

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } 1 \leq u_n \leq 2\ .}$$

b. Si la suite (u_n) converge, que peut-on dire de sa limite ?
Ayant our tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_n \leq 2$; on obtient par passage à la limite $1 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 2$

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$. On admet que la suite (u_n) converge vers ℓ telle que $f(\ell) = \ell$.
Déterminer ℓ.
On résout l'équation $f(\ell) = \ell$.

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff 1 + \frac{1}{1+\ell} = \ell \\ &\iff \frac{1}{1+\ell} = \ell - 1 \\ &\iff 1 = (1+\ell)(\ell-1) \\ &\iff 1 = \ell^2 - 1 \\ &\iff \ell^2 = 2 \\ &\iff \ell = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Mais comme $1 \leq \ell \leq 2$, on déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n \sqrt{2}}$$

Exercice 4 **4 points**

4 pts **Limite de suites**

Déterminer soigneusement les limites de suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2+2}{n+1}$
2. $u_n = 3 + \dfrac{\cos n}{n+1}$
3. $u_n = 3n - 1 - \dfrac{n+3}{1-2n}$
4. $u_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}$

- Pour tout entier naturel n non nul on peut écrire :

$$\frac{n^2+2}{n+1} = \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = n \times \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 2$.

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2}{n+1} = +\infty}$$

- Pour tout entier naturel n non nul on peut écrire :

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$$
$$-\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\cos(n)}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 3 + \frac{\cos(n)}{n+1} = 3}$$

- Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, comme $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$,
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 2 = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3 = 3$.
On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = -\frac{2}{3}}$$

- $u_n = 3n - 1 - \dfrac{n+3}{1-2n}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1=+\infty$,et $\dfrac{n+3}{1-2n}=\dfrac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-2\right)}=\dfrac{\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}-2\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}-2\right)}=-\dfrac{1}{2}$, $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{n+3}{1-2n}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} 3n-1-\frac{n+3}{1-2n}=+\infty}$$

Exercice 5 — 4 points

4 pts **Somme de termes**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n=\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{3}}+\cdots++\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.

1 Calculer u_1, u_2, u_3.
Pour les termes u_2 et u_3 on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

- $u_1=\dfrac{1}{1+\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$
- $u_2=\dfrac{1}{2+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\approx 0,63$
- $u_3=\dfrac{1}{3+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}\approx 0,69$

$$\boxed{u_1=\frac{1}{2}\,;u_2\approx 0,63\,;u_3\approx 0,69}$$

2 Compléter l'algorithme suivant qui calcule u_n en fonction de n.

Initialisation :	Les variables sont les entiers naturels N, I et le réel U. Lire N Affecter à U la valeur 0
Traitement :	Pour I de 1 à N faire $\dfrac{1}{N+\sqrt{I}}+U\to U$ Fin Pour
Sortie :	Afficher U

3 On donne le tableau suivant pour certaines valeurs de n :

n	10	50	100	1000	10000
u_n	0,819	0,914	0,939	0,979	0,993

Conjecturer la monotonie de la suite et sa convergence.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ semble croissante majorée ; De plus elle semble converger vers 1.}}$

4 Montrer que, pour tout entier k avec $1\leq k\leq n$, on a :

$$\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{n+1}.$$

pour tout entier k avec $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{array}{rl}
1 \leq k \leq n & \\
\sqrt{1} \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{n} & \text{en appliquant la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \text{ strictement croissante sur } [0;+\infty[\\
n+1 \leq n+\sqrt{k} \leq n+\sqrt{n} & \text{en ajoutant } n \\
\dfrac{1}{n+1} \geq \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} & \text{en appliquant la fonction } x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ strictement décroissante sur }]0;+\infty[\\
\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \dfrac{1}{n+1} &
\end{array}$$

5 En déduire que la suite converge et calculer sa limite.
On écrit l'ingalité précédente pour k variant de 1 à n

$$\begin{array}{rc}
k=1 & \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n+\sqrt{1}} \leq \dfrac{1}{n+1} \\
k=2 & \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n+\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{n+1} \\
k=3 & \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n+\sqrt{3}} \leq \dfrac{1}{n+1} \\
\dots & \dots \\
k=n-1 & \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n+\sqrt{n-1}} \leq \dfrac{1}{n+1} \\
k=n & \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n+1}
\end{array}$$

On ajoute membre à membre ces n inégalités de même sens, on obtient

$$n \times \frac{1}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq n \times \frac{1}{n+1}$$

Notons $v_n = n \times \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} = n \times \dfrac{1}{n\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}\right)} = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$

et $w_n = n \times \dfrac{1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; on déduit que :

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$; le théorème des gendarmes s'appliquant :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

Exercice 6 — 5 points

5 pts **Etude d'une suite**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1$.

1 Déterminer les termes u_1, u_2, u_3.

- $n=0$ dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1$ donne $u_1 = \dfrac{1}{2}u_0 + 2\times 0 - 1 = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$
- $n=1$ dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1$ donne $u_2 = \dfrac{1}{2}u_1 + 2\times 1 - 1 = \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 = \dfrac{3}{4}$
- $n=2$ dans la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1$ donne $u_3 = \dfrac{1}{2}u_2 + 2\times 2 - 1 = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right) + 3 = \dfrac{27}{8}$

$$\boxed{u_1 = -\frac{1}{2} ; u_2 = \frac{3}{4} ; u_3 = \frac{27}{8}}$$

2 On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 4n + 10$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4(n+1) + 10 \\ &= \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4n - 4 + 10 \\ &= \frac{1}{2}u_n - 2n + 5 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 4n + 10) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } \frac{1}{2}.}$$

b. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

Comme la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, $v_n = q^n \times v_0$

$v_0 = u_0 + 10 = 11$ puis

$$\boxed{v_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

Enfin de l'égalité : $v_n = u_n - 4n + 10$, on déduit

$$u_n = v_n + 4n - 10 = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4n - 10$$

$$\boxed{u_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 4n - 10}$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} 11\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \\ &\lim_{n\to+\infty} 4n - 10 = +\infty \end{aligned}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{x\to+\infty} u_n = +\infty$$

3 On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Monter que : $S_n = 22\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] + (n+1)(2n-10)$.

On utilise la relation $u_k = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 4k - 10$ au rang $0\,;1\,;2\cdots;n$:

$$\begin{array}{rr}
k=0 & u_0 = 11\times\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 4\times 0 - 10\\
k=1 & u_1 = 11\times\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4\times 1 - 10\\
k=2 & u_2 = 11\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\times 2 - 10\\
k=3 & u_3 = 11\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\times 3 - 10\\
\cdots & \cdots\\
k=n-1 & u_{n-1} = 11\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4\times(n-1) - 10\\
k=n & u_n = 11\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\times n - 10
\end{array}$$

On ajoute membre à membre ces $n+1$ égalités ; il vient

$$\begin{aligned}
S_n = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n &= 11\times\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+4[1+2+3+\cdots+n]-10(n+1)\\
&= 11\times\left[\frac{1-\text{raison}^{\text{Nombres de termes}}}{1-\text{raison}}\times\text{ Premier terme}\right]+4\left[\frac{N(P+D)}{2}\right]-10(n+1)\\
&= 11\times\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\times 1\right]+4\left[\frac{(n+1)(0+n)}{2}\right]-10(n+1)\\
&= 22\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+2n(n+1)-10(n+1)\\
&= 22\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+2n(n+1)-10(n+1)\\
&= 22\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+(n+1)(2n-10)
\end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = 22\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+(n+1)(2n-10).}$$

Exercice 7 — 2 points

2 pts v **Vrai-Faux**

Pour chacune des affirmatons suivantes, répondre par Vrai ou Faux et justifier votre réponse.

1 Soit (u_n) une suite définie et croissante sur $\mathbb{N}$. Pour tout $n \geq 0$, on a : $u_n < 100$.
Affirmation 1 : On ne peut rien en déduire sur la convergence de la suite (u_n). Ayant pour tout $n \geq 0$, on a : $u_n < 100$, la suite (u_n) est majorée par 100.
Ainsi la suite est croissante et majorée.

On peut donc affirmer que la suite (u_n) est convergente,d'après le théorème de la convergence monotone.

2 Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 1024$ et $v_{n+1} = \sqrt{v_n} - 1$

Affirmation 2 : La suite (v_n) n'est pas définie sur $\mathbb{N}$. Avec une calculatrice, ou à la main...

- $v_0 = 1024$

- $v_1 = \sqrt{v_0} - 1 = \sqrt{1024} - 1 = 31$
- $v_2 = \sqrt{v_1} - 1 = \sqrt{31} - 1$
- $v_3 = \sqrt{v_2} - 1 \approx 1,13$
- $v_4 = \sqrt{v_3} - 1 \approx 0,06$
- $v_5 = \sqrt{v_4} - 1 \approx -0,74$

On ne peut donc pas calculer v_5.

$v_4 < 0$, on peut donc calculer sa racine carrée et donc la suite (v_n) n'est pas définie pour $n \geq 5$.