Lycée l'Oiselet **Jeudi 1er Mars 2018**

BACCALAURÉAT BLANC 2018 DE MATHÉMATIQUES – SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter les cinq exercices.
Vous commencerez par le QCM qui sera ramassé 60 minutes après le début de l'épreuve.
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : Sciences Physiques , SVT, ISN ou Sciences de l'Ingénieur.*
- *votre classe : Terminale S1 ou Terminale S2 ou …*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages, le QCM étant sur une feuille supplémentaire, distribuée séparément.

Exercice 1

Le QCM !

Commun à tous les candidats **5 points**

Exercice 2

Commun à tous les candidats **5 points**

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Une entreprise fabrique des ordinateurs utilisant de très nombreux composants électroniques. Lors d'un retour au service après-vente, on s'aperçoit qu'un composant pose problème. Si le défaut est décelé avant la sortie de l'usine, le composant sera changé. Sinon, l'ordinateur sera endommagé à la première utilisation et non réparable. Il sera alors repris par le service après-vente et détruit. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'ordinateurs dont 1% comporte le composant défectueux.
On obtient les résultats suivants :

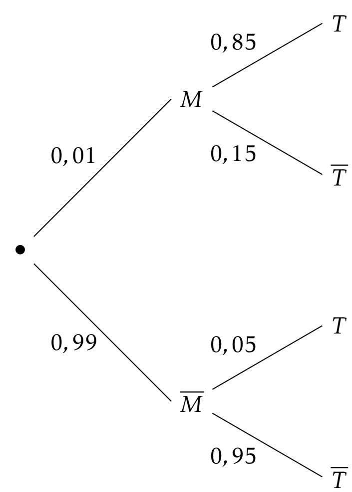
- si un ordinateur comporte le composant défectueux, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un ordinateur ne comporte pas le composant défectueux, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la production entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la présence du composant défectueux.
On note :

M l'évènement : « l'ordinateur comporte le composant défectueux » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1 Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.



2 Un ordinateur est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité pour qu'il comporte le composant le composant défectueux et que son test soit positif ?
On veut ici calculer la probabilité :

$$\begin{aligned} p(M \cap T) &= p(M) \times p_M(T) \\ &= 0,01 \times 0,85 \\ &= 0,0085 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un ordinateur comporte le composant défectueux et que son test soit positif $p(M \cap T) = 0,0085$

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
On utilise la partition $M, \overline{M}$, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M \cap T) + p\left(\overline{M} \cap T\right) \\ &= p(M) \times p_M(T) + p\left(\overline{M}\right) \times p_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,01 \times 0,85 + 0,99 \times 0,05 \\ &= 0,0085 + 0,0495 \\ &= 0,058 \end{aligned}$$

La probabilité de choisir un ordinateur ayant un test positif est égale à 0,058

3 Un ordinateur est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il comporte le composant défectueux ?
On veut ici calculer la probabilité conditionnelle : $p_T(M)$:

$$\begin{aligned} p_T(M) &= \frac{p(T \cap M)}{p(T)} \\ &= \frac{0,01 \times 0,85}{0,058} \\ &\approx 0,1466 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un ordinateur comporte le composant défectueux sachant qu' il a eu un test positif est $p_T(M) \approx 0,1466$

4 On choisit cinq ordinateurs au hasard. Le nombre d'ordinateurs fabriqués permet de considérer les épreuves indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq ordinateurs choisis, associe le nombre d'ordinateurs comportant le composant défectueux.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
On répète 5 fois, de façon indépendante,l'expérience « On choisit au hasard un ordinateur dans cette production » qui comporte 2 issues :

- « l'ordinateur est défectueux » considéré comme succès, de probabilité $p = 0,01$
- « l'ordinateur n'est pas défectueux » considéré comme échec, de probabilité $q = 1 - p = 0,99$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,01$ notée $\mathscr{B}(5;0,01)$.

Pour tout entier k où $0 \leq k \leq 5$, on a

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \times (0,01)^k \times (0,99)^{5-k}$$

b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq ordinateurs ait un test positif ?
Attention, il faut mettre en place un autre modèle !
On répète 5 fois, de façon indépendante,l'expérience « On choisit au hasard un ordinateur dans cette production » qui comporte 2 issues :

- « l'ordinateur a un test positif » considéré comme succès, de probabilité $p = 0,0058$
- « l'ordinateur n'a pas un test positif » considéré comme échec, de probabilité $q = 1 - p = 0,942$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire Y prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,058$ notée $\mathscr{B}(5;0,058)$.

Pour tout entier k où $0 \leq k \leq 5$, on a

$$P(X = k) = \binom{5}{k} \times (0,058)^k \times (0,942)^{5-k}$$

On veut ici calculer la probabilité $p(Y \geq 1) = 1 - p\left(\overline{Y \geq 1}\right) = 1 - p(Y = 0)$
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{DISTR}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{binomFdp(}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{,}$ $\boxed{0.058}$ $\boxed{,}$ $\boxed{0}$ $\boxed{)}$
$binomFdp(5, 0.058, 0) \approx 0.7417$ Ceci calcule $P(Y = 0)$ dans le cas où Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, 0, 058)$

La probabilité pour qu'au moins un des cinq ordinateurs ait un test positif est $p(Y \geq 1) \approx 0,2583$

5 Le coût engagé pour le changement du composant d'un ordinateur ayant eu un test positif est de 100 euros et le coût de la reprise et de la destruction d'un ordinateur non dépisté par le test et ayant été rapporté au service après-vente est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.
D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par ordinateur subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un ordinateur le coût à engager.
On a :

$$\begin{aligned} E(C) &= p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3 \\ &= 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,058 + 1000 \times 0,0015 \\ &= 5,8 + 1,5 \\ &= 7,3 \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un ordinateur le coût à engager est $E(C) = 7,3$ €

b. En une journée, l'entreprise fabrique 200 ordinateurs. Si tous ces ordinateurs sont soumis au test, quelle somme doit-elle prévoir d'engager ?
Pour 200 ordinateurs, d'après le calcul de l'espérance, il devra prévoir en moyenne 7,3€par ordinateur, soit $7,3 \times 200 = 1460$€.

Si toute la production est soumise au test, l'entreprise devra prévoir 1460 €.

Exercice 3

Commun à tous les candidats **5 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \left(x^2 + 2\right)e^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right)e^{-x}.$$

1 Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Limite en $+\infty$:
  On débouche sur la forme indéterminée : $0 \times \infty$.
  On utilise ici les limites de référence.
  On écrit dans un premier temps : $g(x) = 1 - x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x}$
  On sait que pour tout entier naturel n ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, donc par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$
  soit pour tout entier naturel n ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^ne^{-x} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2e^{-x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2xe^{-x} = 0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0\end{array}\right\}\quad \text{Par somme } \lim_{x\to+\infty} 1 - x^2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-x} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.}$$

- Limite en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} -\left(x^2 - 2x + 2\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\end{array}\right\}\quad \text{Par produit } \lim_{x\to-\infty} -\left(x^2 - 2x + 2\right)e^{-x} = -\infty$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.}$$

2 Montrer que $g'(x) = (x-2)^2e^{-x}$ et déterminer son signe.

- Calcul de $g'(x)$: g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables. $g = 1 + uv$, d'où $g' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = -\left(x^2 - 2x + 2\right)\\ v(x) & = e^{-x}\end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = -2x + 2\\ v'(x) & = -e^{-x}\end{array}\right.$
  On a ici utilisé

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x+2)e^{-x} + (-e^{-x}) \times \left[-\left(x^2 - 2x + 2\right)\right]\\ &= e^{-x}\left(-2x + 2 + x^2 - 2x + 2\right)\\ &= \left(x^2 - 4x + 4\right)e^{-x}\\ &= (x-2)^2e^{-x}\end{aligned}$$

- Signe de $g'(x)$: La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, ainsi pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$, par ailleurs , pour tout réel distint de 2, $(x-2)^2$ est strictement positif, car c'est le carré d'un réel non nul. D'où le signe de $g'(x)$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $g'(x)$		+	0	+	

3 En déduire le tableau de variation de g.

On déduit le tableau de variations de g sur $]-\infty;+\infty[$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	1

4 Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que

$$0,35 \leqslant \alpha \leqslant 0,36.$$

D'après le théorème de la bijection :

- ✍ g est une fonction dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$.
- ✍ g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ✍ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- ✍ g réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
  Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$ a une racine unique α dans $\mathbb{R}$.

Avec une calculatrice, on obtient $g(0,35) \approx -0,002$ et $g(0,36) \approx 0,017$
Ainsi $g(0,35) < 0 < g(0,36)$,
ce qui donne $g(0,35) < g(\alpha) < g(0,36)$, puis comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{0,35 < \alpha < 0,36}$$

5 En déduire le signe de g.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
Variations de g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
Signe de $g(x)$		-	0	$+$	

Partie II : Étude de f

1 Calculer la limite de f en $+\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
On a vu à la partie I que pour tout entier naturel n ; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$.
Or $f(x) = x - 1 + \left(x^2 + 2\right)e^{-x} = x - 1 + x^2e^{-x} + 2e^{-x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

2 Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x réel.
f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f = u + v$ d'où $f' = u' + v'$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = x - 1 \\ v(x) & = \left(x^2 + 2\right)e^{-x} \end{array}\right. \quad \text{ainsi : } \left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = 1 \\ v & = ab \end{array}\right.$$

Comme $v = ab$, on déduit $v' = a'b + b'a$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{ll} a(x) & = x^2+2 \\ v(x) & = \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} a'(x) & = 2x \\ v'(x) & = -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) + v'(x) \\ &= 1 + 2x\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2+2\right) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= 1 - \left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

3 En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de f et donner son tableau de variation.
On déduit le tableau de variations de f sur $]-\infty;+\infty[$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4 **a.** Démontrer que :

$$f(\alpha) = \alpha\,(1 + 2\mathrm{e}^{-\alpha}).$$

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha - 1 + \alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha} + 2\mathrm{e}^{-\alpha} && \textbf{or } g(\alpha) = 0 \\ &= \alpha - 1 + \alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha} + 2\mathrm{e}^{-\alpha} + 1 - \left(\alpha^2 - 2\alpha + 2\right)\mathrm{e}^{-\alpha} && \textbf{car } g(\alpha) = 1 - \left(\alpha^2 - 2\alpha + 2\right)\mathrm{e}^{-\alpha} = 0 \\ &= \alpha - 1 + \alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha} + 2\mathrm{e}^{-\alpha} + 1 - \alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha} + 2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha} - 2\mathrm{e}^{-\alpha} \\ &= \alpha + 2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha} \\ &= \alpha\,(1 + 2\mathrm{e}^{-\alpha}). \end{aligned}$$

b. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\,(1 + 2\mathrm{e}^{-x})$ est strictement croissante sur $[0;1]$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables. $h = uv$, d'où $h = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$:
$\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = x \\ v(x) & = 1 + 2\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = 1 \\ v'(x) & = -2\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \times (1 + 2\mathrm{e}^{-x}) + (-2\mathrm{e}^{-x}) \times x \\ &= 1 + 2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} \\ &= 2\mathrm{e}^{-x}\,(1-x) + 1 \end{aligned}$$

- La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit : pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{e}^{-x} > 0$
- Par ailleurs si $x \in [0;1]$, alors $x \leq 1$, donc $-x \geq -1$, puis $1 - x \geq 0$
- Ainsi, si $x \in [0;1]$, alors $2(1-x)\mathrm{e}^{-x} \geq 0$ puis en ajoutant 1 ; $2(1-x)\mathrm{e}^{-x} + 1 \geq 1$
- on déduit donc que pour tout $x \in [0;1]$, $h'(x) > 0$, ce qui permet d'affirmer que la fonction h est strictement croissante sur $[0;1]$.

c. À l'aide de l'encadrement de α déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 3×10^{-2} .
Comme $f(\alpha) = h(\alpha)$,

de l'encadrement	$0,35 < \alpha < 0,36$	
on déduit	$h(0,35) < h(\alpha) < h(0,36)$	car h est strictement croissante sur $[0;1]$
	$0,84 < h(\alpha) < 0,87$	

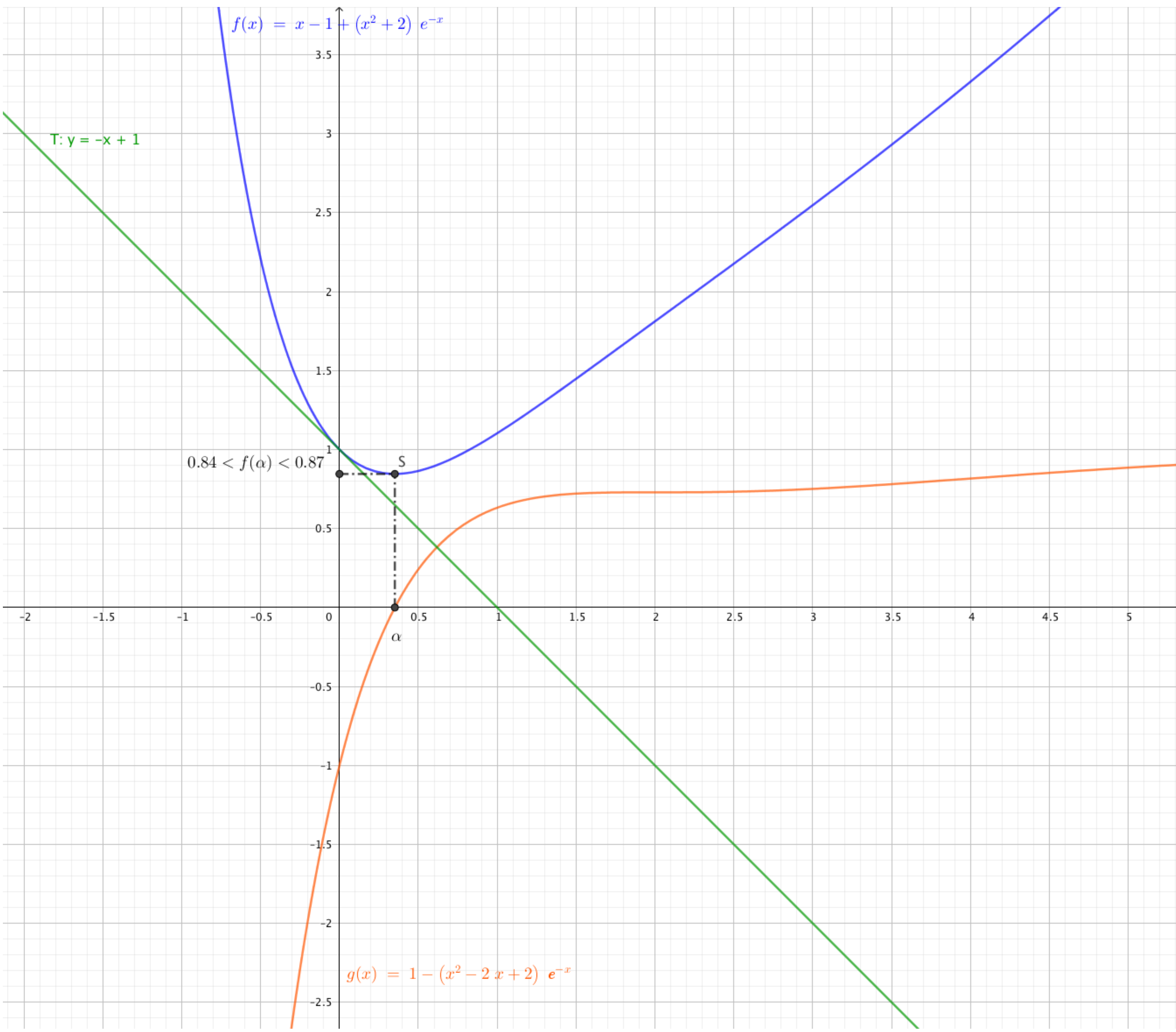
$$\boxed{0,84 < f(\alpha) < 0,87}$$

5 Donner une équation de la tangente T à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

- ✏ $f'(0) = g(0) = 1 - 2e^{-0} = 1 - 2 = -1$
- ✏ $f(0) = -1 + 2e^{-0} = -1 + 2 = 1$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = -(x-0)+1, \text{ soit } y = -x+1}$$

Pour terminer une figure non demandée :



Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B. Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1 Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
"Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B." donc

$$a_n + b_n = 2200.$$

2 Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.
Au début du $n+1$-ième jour, le bassin A contient a_n, on ajoute 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0,15b_n$ et on enlève 10 % du volume présent dans A au début de la journée :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + 0,15b_n - 0,1a_n \\ &= a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n \\ &= 0,75a_n + 330 \\ &= \frac{3}{4}a_n + 330 \end{aligned}$$

En effet, comme pour tout entier n ; on a $a_n + b_n = 2200$, on déduit donc $b_n = 2200 - a_n$.

On a bien, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3 L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1100.
Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.
n est un entier naturel et a est un réel.

$n \leftarrow 0$
$a \leftarrow 800$
tant que $a < 1\,100$ **faire**
  $a \leftarrow \cdots$
  $n \leftarrow \cdots$
fin
Afficher n

$n \leftarrow 0$
$a \leftarrow 800$
tant que $a < 1\,100$ **faire**
  $a \leftarrow \frac{3}{4}a + 330$
  $n \leftarrow n + 1$
fin
Afficher n

Voici l'algorithme codé en Python :

```python
# Exo Suite Bac Blanc 2018
n=0
a= 800
while a<1100:
    a=3/4*a+330
    n=n+1
print(n)
```

4 Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
Pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= a_{n+1} - 1320 \\
&= \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320 \\
&= \frac{3}{4}a_n - 990 \\
&= \frac{3}{4}(a_n 1320) \qquad \textbf{en effet } \frac{3}{4} \times 1320 = 990 \\
&= \frac{3}{4}u_n
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, de premier terme $u_0 = a_0 - 1320 = -520$

b. Exprimer u_n en fonction de n.
Comme la suite (u_n) es e géométrique de raison $\frac{3}{4}$, de premier terme $u_0 = -520$,
on a : $u_n = q^n \times u_0$,
donc $u_n = -520\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
Comme $u_n = a_n - 1320$; on déduit $a_n = u_n + 1320$, soit :

$$\boxed{a_n = 1320 - 520\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

5 On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau. Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Si ce jour arrive, on aura $a_n + b_n = 2a_n$ mais la conservation du volume global s'écrira alors $2a_n = 2200 \Leftrightarrow a_n = 1100$
Il faut donc résoudre l'équation $1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100$ d'inconnue n.

$$\begin{aligned}
1\,320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1100 &\iff 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 220 \\
&\iff \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{11}{26} \\
&\iff n \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{11}{26}\right)
\end{aligned}$$

Finalement $n = \dfrac{\ln\left(\frac{11}{26}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 2,99$

On vérifie : $a_3 = 1\,100{,}625$ et $b_3 = 1\,099{,}375$ avec $a_3 - b_3 = 1,251$.

À la fin du troisième jour, les deux bassins auront le même volume au mètre cube près.

Une autre option consiste à utiliser un algorithme

```
# Exo Suite Bac Blanc 2018
def a(n):
    return 1320-520*0.75**n
def b(n):
    return 2200-a(n)
n=0
while abs(a(n)-b(n))>2:
    n=n+1
print(n,a(n),b(n))
```

Une fois exécuté, ce dernier retourne $n = 3, a(3) = 1100,625$ et $b(3) = 1099,375$.

Exercice 5

Commun à tous les candidats **2 points**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (ax+b)\ln x$$

où a et b sont deux réels donnés.
La courbe passe par les points $A(1;0)$ et $B(3;0)$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2.

Calculer a et b.
Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de cette fonction f :

$$\begin{aligned} B(3;0)\in\mathcal{C}_f \quad &\iff f(3)=0\\ &\iff (3a+b)\ln 3 = 0\\ &\iff 3a+b=0 \text{ car } \ln 3 \neq 0\end{aligned}$$

D'une part, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $f'(1)$.
D'autre part, si on note $C(0;2)$, cette tangente est la droite T de coeefficient directeur :

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}\\ &= \frac{2-0}{0-1}\\ &= -2\end{aligned}$$

On a donc $f'(1)=-2$;
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables. $f=uv$ d'où $f'=u'v+v'u$ avec pour tout réel x, dans $]0;+\infty[$: $\begin{cases} u(x) &= ax+b\\ v(x) &= \ln x\end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= a\\ v'(x) &= \dfrac{1}{x}\end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\times\ln x + (ax+b)\times\frac{1}{x}\\ &= a\times \ln x + \frac{ax+b}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1)=-2 \quad &\iff a\ln 1 + \frac{a+b}{1} = -2\\ &a+b=-2\end{aligned}$$

Ainsi a et b sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} 3a+b=0\\ a+b=-2\end{cases} \iff \begin{cases} b=-3a\\ a-3a=-2\end{cases} \iff \begin{cases} -2a=-2\\ b=-3a\end{cases} \iff \begin{cases} a=1\\ b=-3\end{cases}$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc définie sur }]0;+\infty[\text{ par : } f(x)=(x-3)\ln x.}$