TS2 2015

Devoir en temps libre n° 10

Mai 2015

à rendre en Mai 2015

Exercice I

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère l'équation

$$(E): \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

1) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2) On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geqslant 1$.
   a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).
   b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
   c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 et les segments $[M_1, M_2]$, $[M_2, M_3]$ et $[M_3, M_4]$ sur une figure.

3) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $z_n = 2^n \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n i}{2}\right)$.

4) a) Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.
   b) Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5) On note $\ell^n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\ell^n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.
   b) Déterminer le plus petit entier n tel que $\ell^n \geqslant 1000$.

Exercice II

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs (chutes de pierres, présence de troupeaux sur la route, verglas, etc.).
Un autocar part du dépôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance, en km, que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident. On admet que D suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{82}$
Les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

1) Calculez la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   a) Comprise entre 50 et 100 km ;
   b) supérieure à 300 km.

2) Sachant que l'autocar a déjà parcouru 300 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3) Quelle est la distance moyenne d_m parcourue sans incident ? Justifiez.

4) L'entreprise possède 96 autocars. Les distances parcourues par chacun d'eux sont des variables aléatoires de même loi exponentielle vue ci-dessus.

   Les incidents qui peuvent survenir aux autocars sont indépendants les uns des autres.

   Pour tout nombre $d > 0$, X_d désigne la variable aléatoire qui donne le nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
   a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_{d_m} ?
   b) Quelle est, à une unité près, le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d_m kilomètres.