Le temps des révisions

Luc Giraud
lucgiraud@gmail.com

14 juin 2015

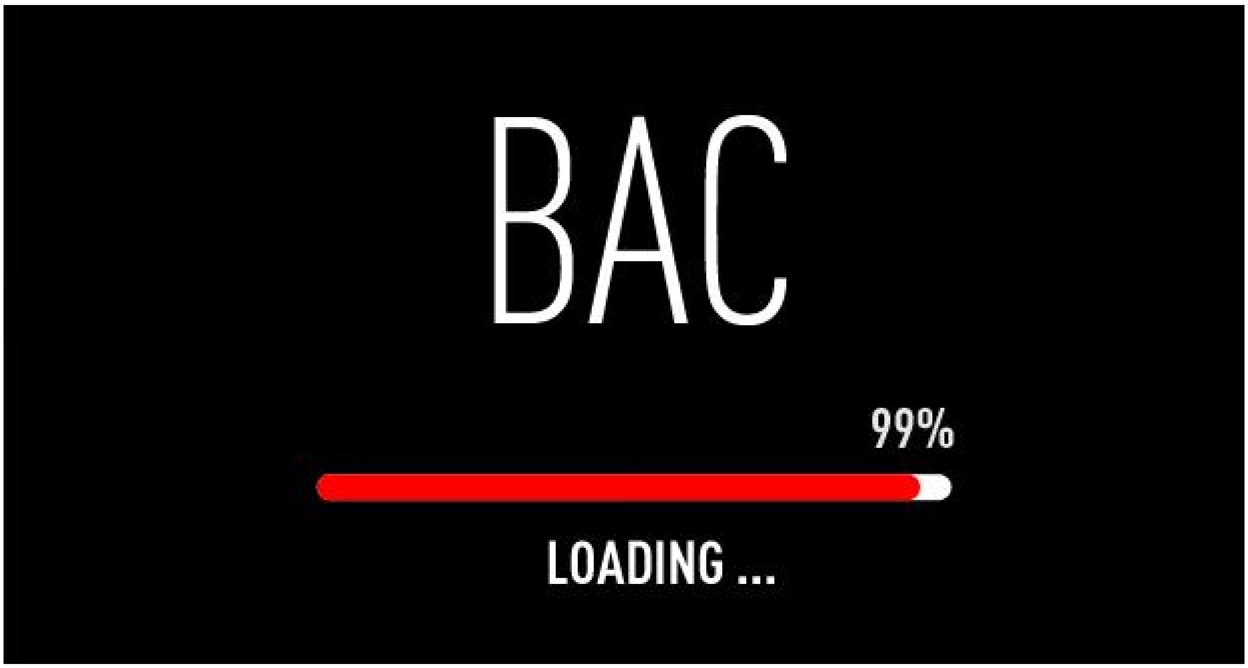
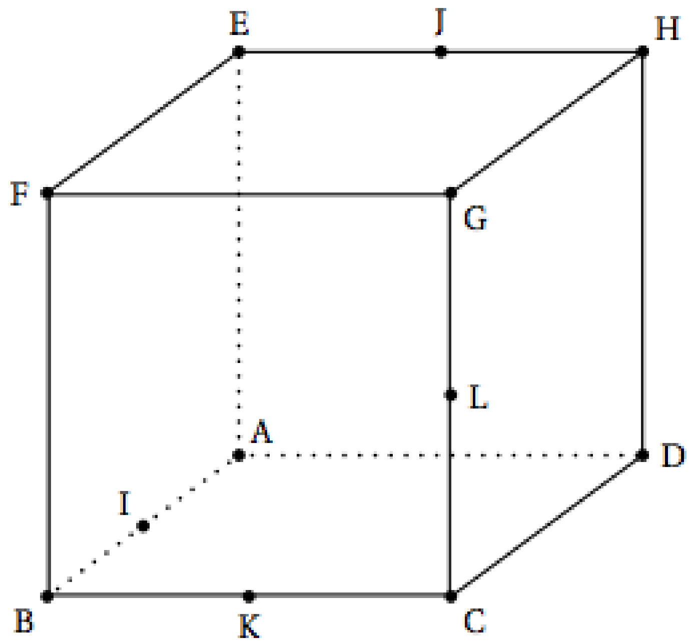


Table des matières

Baccalauréat S Liban 27 mai 2015

Exercice 1 **6 points**



ABCDEFGH est un cube.
I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1 **a.** Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

3 Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.

4 Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

5 Calculer le volume du tétraèdre FIJK.

6 Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Exercice 2 **6 points**

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :
pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

1 Calculer$u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

2 **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
b. En déduire la valeur exacte de u_1.

3 **a.** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ...
	|Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b. À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

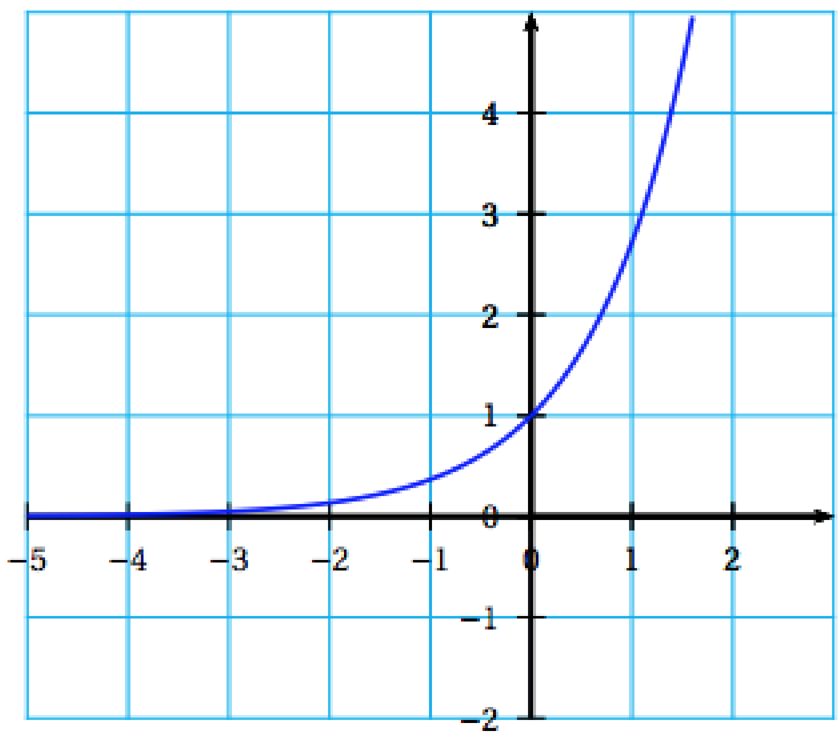
4 **a.** Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5 On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

Exercice 3 — 3 points

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1 Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.
Démontrer que la droite $\mathcal{D}_\mathrm{e}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

2 Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.

3 Démontrer cette conjecture.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1 Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2 **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3 Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.

4 L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A. *estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?

5 Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est $0,4$.
L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.
Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

TS2 2015

Baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015

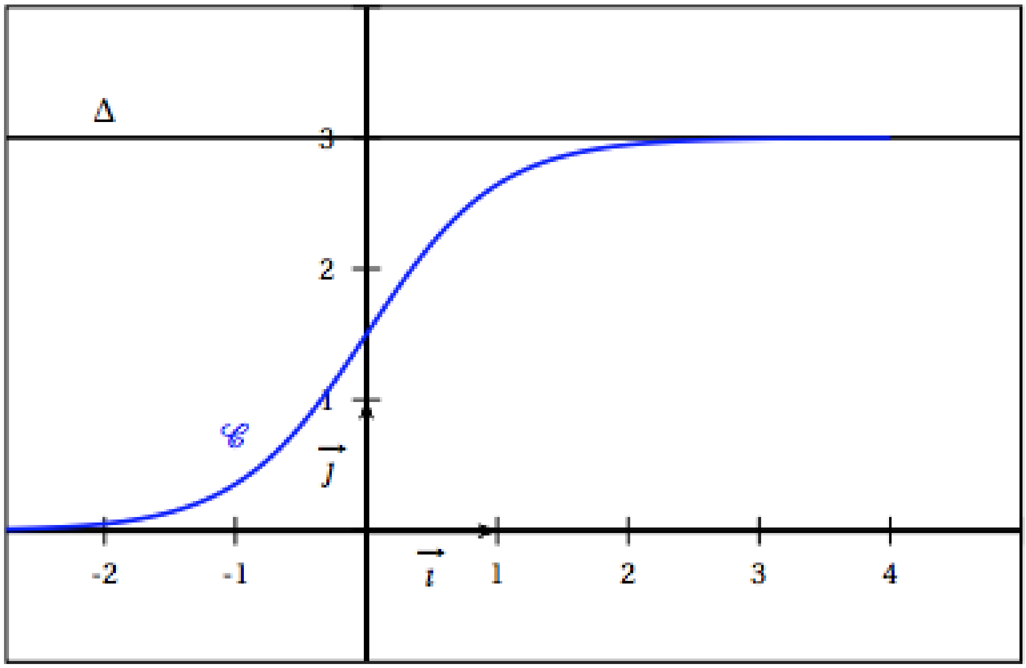
Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1 Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

3 Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1 Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

2 On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

3 Soit a un réel strictement positif.

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

c. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par
$\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0\\ f(x) & \leqslant y & \leqslant 3\end{array}\right.$
Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1 Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2 En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.
Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1 Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?

2 Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$.

- **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, $\quad h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
- **b.** Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
- **c.** La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

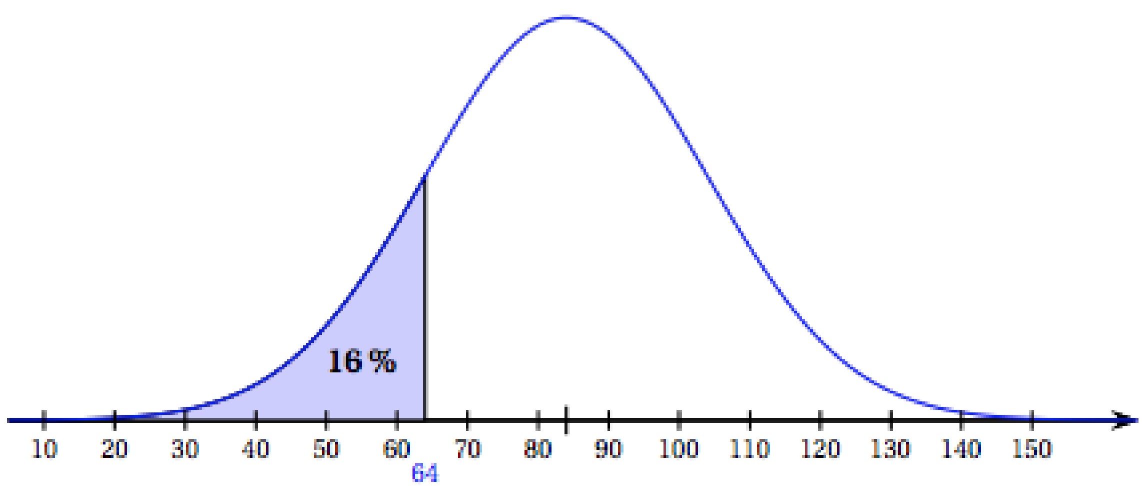
Exercice 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1

- **a.** En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.
- **b.** Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

2 On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X-84}{\sigma}$.

- **a.** Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
- **b.** Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.
- **c.** En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

3 Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.

- **a.** Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.

b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1 On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).

a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.

b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

2 L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.

b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

Exercice 4 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Soit un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Dans le repère $\left(A~;~\overrightarrow{AB},~\overrightarrow{AD},~\overrightarrow{AE}\right)$, on considère les points M, N et P de coordonnées respectives $M\left(1~;~1~;~\dfrac{3}{4}\right)$, $N\left(0~;~\dfrac{1}{2}~;~1\right)$, $P\left(1~;~0~;~-\dfrac{5}{4}\right)$.

1 Placer M, N et P sur la figure donnée en annexe.

2 Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.

3 On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

a. Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points M, N et P données ci-dessus.

b. À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle MNP ?

4 On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle MNP est rectangle et isocèle en M.

5 On considère le vecteur $\vec{n}(5~;~-8~;~4)$ normal au plan (MNP).

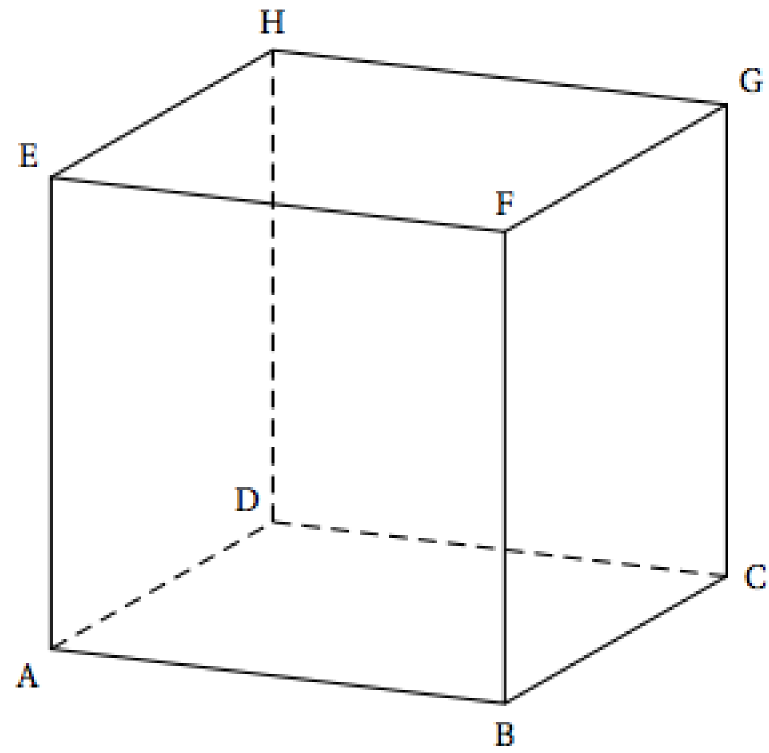
a. Déterminer une équation cartésienne du plan (MNP).

b. On considère la droite Δ passant par F et de vecteur directeur $\vec{n}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

6 Soit K le point d'intersection du plan (MNP) et de la droite Δ.

a. Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{4}{7}~;~\dfrac{24}{35}~;~\dfrac{23}{35}\right)$.

b. On donne $FK = \sqrt{\dfrac{27}{35}}$.
Calculer le volume du tétraèdre MNPF.



ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4 : Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Algorithme 1

Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

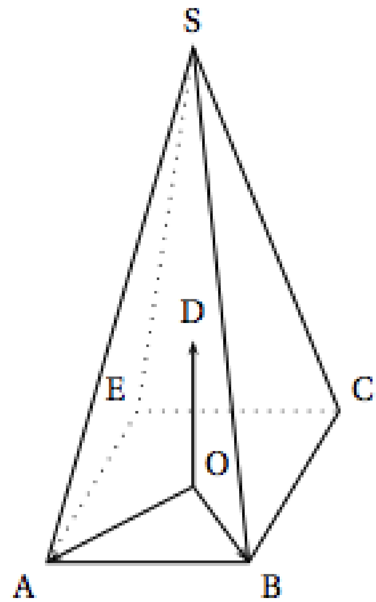
Saisir $x_M, y_M, z_M, x_N, y_N, z_N, x_P, y_P, z_P$
d prend la valeur $x_N - x_M$
e prend la valeur $y_N - y_M$
f prend la valeur $z_N - z_M$
g prend la valeur $x_P - x_M$
h prend la valeur $y_P - y_M$
i prend la valeur $z_P - z_M$
k prend la valeur $d \times g + e \times h + f \times i$

Baccalauréat S Amérique du Nord 2 juin 2015

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $\left(O\,;\,\vec{OA},\,\vec{OB},\vec{OD}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,3)$ dans ce repère.



Partie A

1 Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.

2 Soit V le point d'intersection du plan (EAU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.

3 Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\,;\,-\frac{1}{6}\,;\,0\right)$.
Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1 On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$.
Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.

2 Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.

3 Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).

4 Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x_0 & = & -3 \\ y_0 & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} & = & 0,6x_n + 0,8y_n \end{array}\right.$$

1 **a.** Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1 et A_2.

b. Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

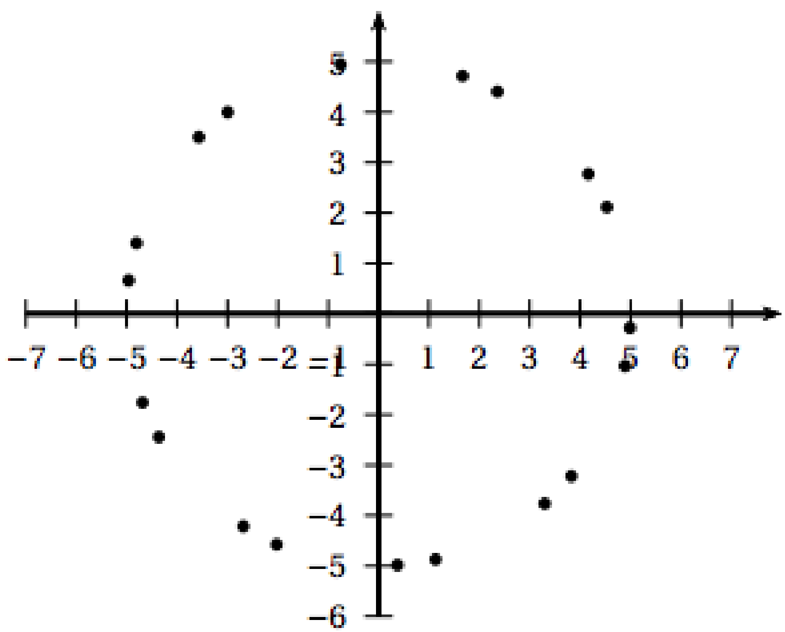
Variables :
i, x, y, t : nombres réels

Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4

Traitement :
Pour i allant de 0 à 20
    Construire le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$
    t prend la valeur x
    x prend la valeur ....
    y prend la valeur ....
Fin Pour

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

c. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1 et A_2.. On les nommera sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**.
Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2 Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.
Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe du point A_n.

a. Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z_n = z_{n+1}$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} z_0$.

d. Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

e. Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.
Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie).**
Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

Exercice 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1 Calculer la probabilité de l'évènement M : « la tablette est mise sur le marché ».

2 On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet évènement atteigne 0,97.
Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'évènement « la tablette est mise sur le marché »soit égale à $0,97$.

Partie B Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.
L'entreprise a trois fournisseurs différents :
le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20
Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.
On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_1 l'évènement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1,2 ou 3, et C l'évènement « la fève est conforme ».

1 Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.

2 Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, L ?entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes.
Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

Exercice 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1 Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

2 Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3 En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1 Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2 **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f?(x) = u(x)$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Soit $\mathcal{C}$? la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1 Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$? ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2 On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$$

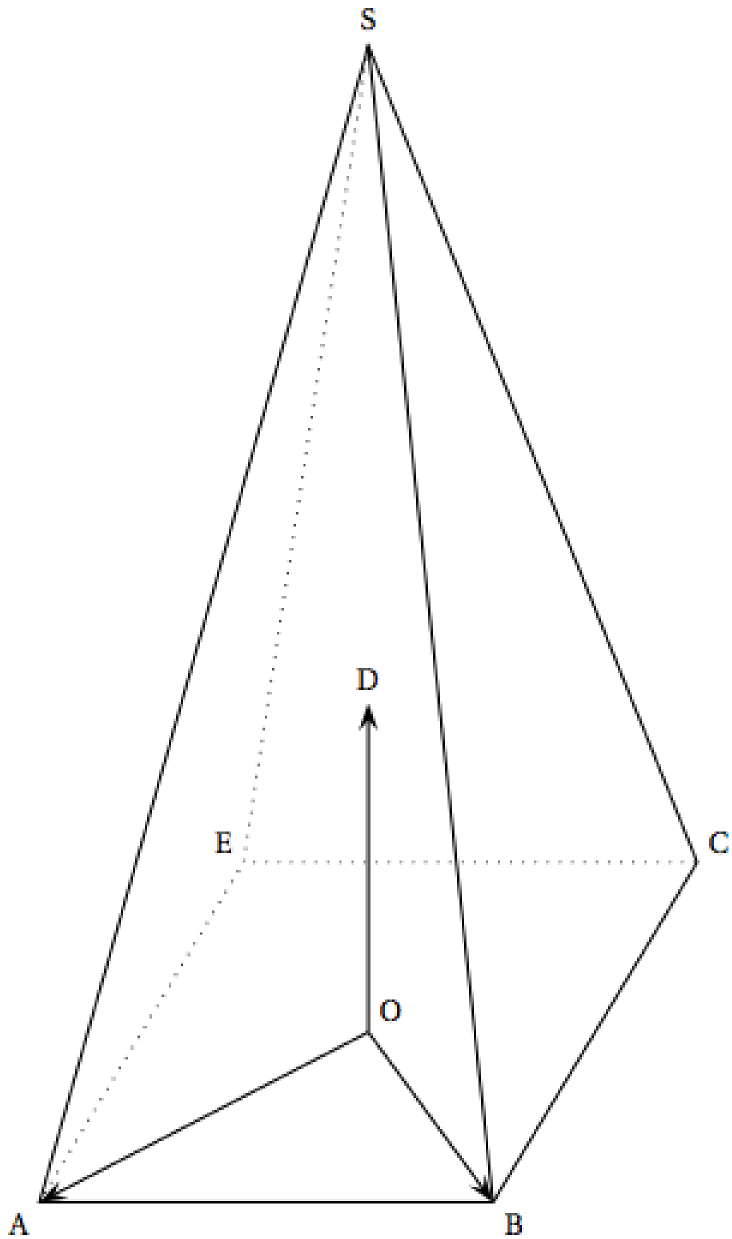
est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

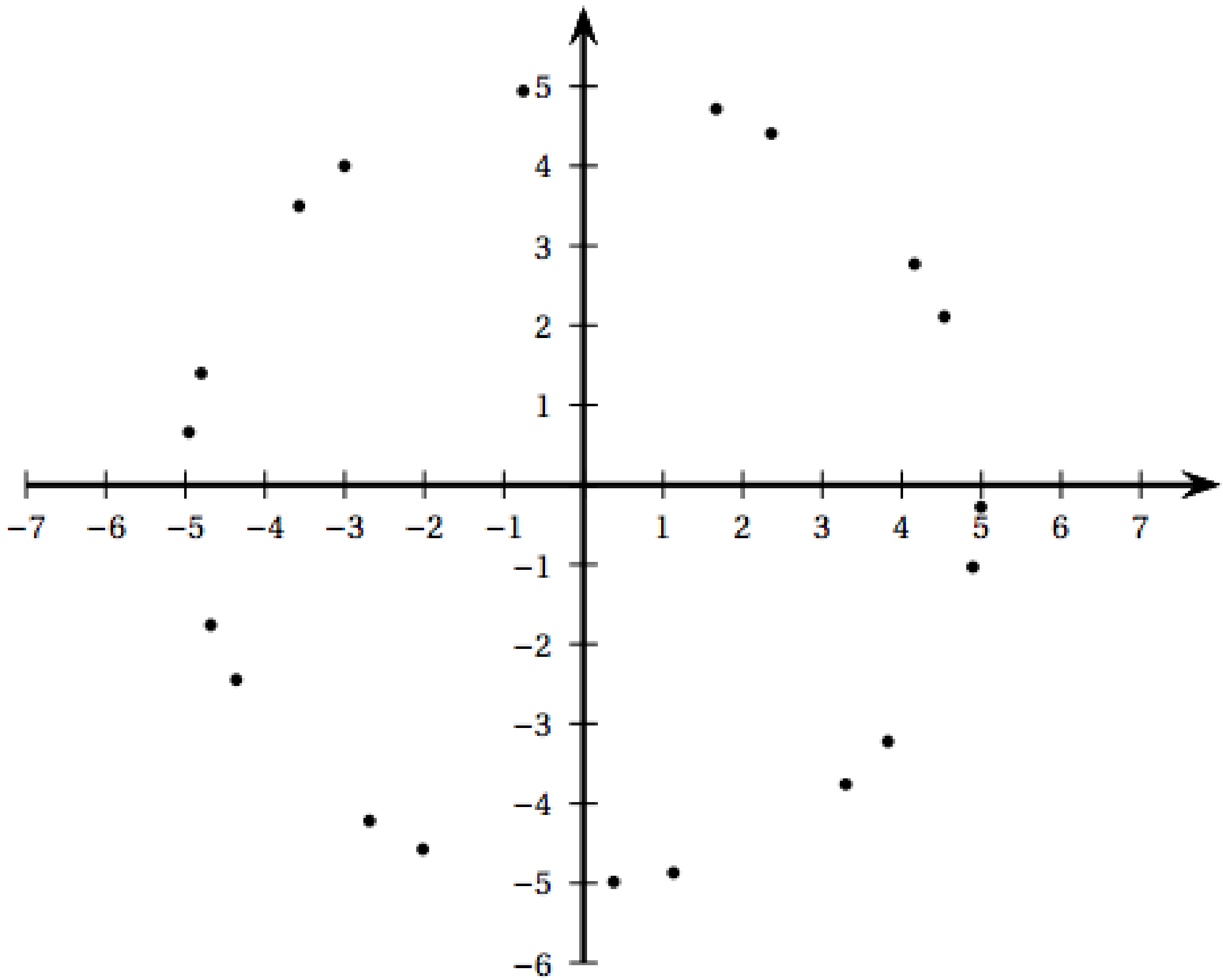
Interpréter graphiquement ce résultat.

Annexe

Annexe 1 (Exercice 1)



Annexe 2 (Exercice 2)



Baccalauréat S Centres étrangers 10 juin 2015

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont premier prix, et les autres sont haut de gamme. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas haut de gamme, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas haut de gamme, et en trouve 19 qui sont défectueux.

   Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?
   On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

   Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas premier prix qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*

   Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin :

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont premier prix, les autres haut de gamme ;
- 3 % des cadenas haut de gamme sont défectueux ;
- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- p la probabilité qu'un cadenas premier prix soit défectueux ;
- H l'évènement : « le cadenas prélevé est haut de gamme » ;
- D l'évènement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1 Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2 Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p.
Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?

3 Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.

Exercice 2 — 4 points

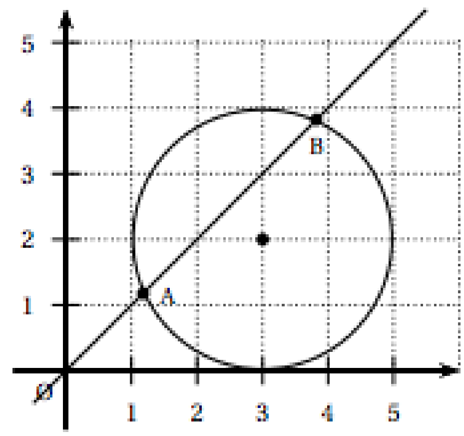
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \quad \text{et} \quad |z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées $(3\,;\,2)$ et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.
Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.



Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB].

2. Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1\,515}$ est un réel.

Pour les questions 3 et 4, on considère les points E (2 ; 1 ; - 3), F (1 ; -1 ; 2) *et* G (-1 ; 3 ; 1) *dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.*

3. Affirmation 3 : une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t \\ y &=& -3+4t \\ z &=& 7-10t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

4. Affirmation 4 : une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{\text{FEG}}$, arrondie au degré, est 50°.

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

1 Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

a. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x}-1\right)\left(2\mathrm{e}^{x}+1\right)$.

b. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2 Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

b. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c. Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3 Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4 Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif.
Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que ... ... Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

Exercice 4 — 5 points

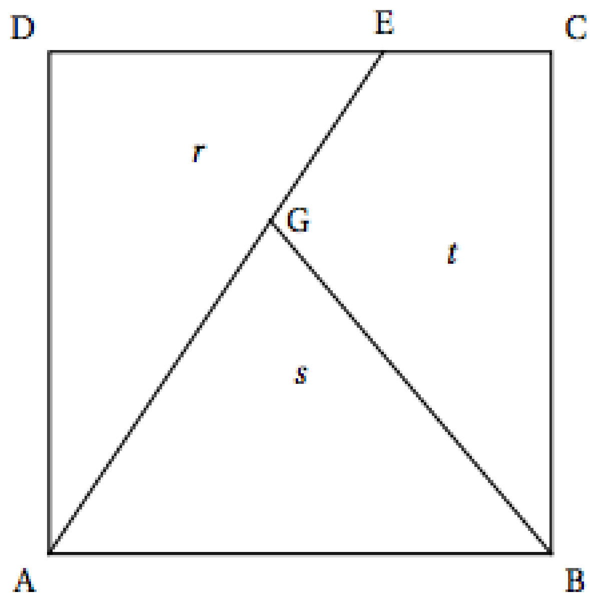
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes

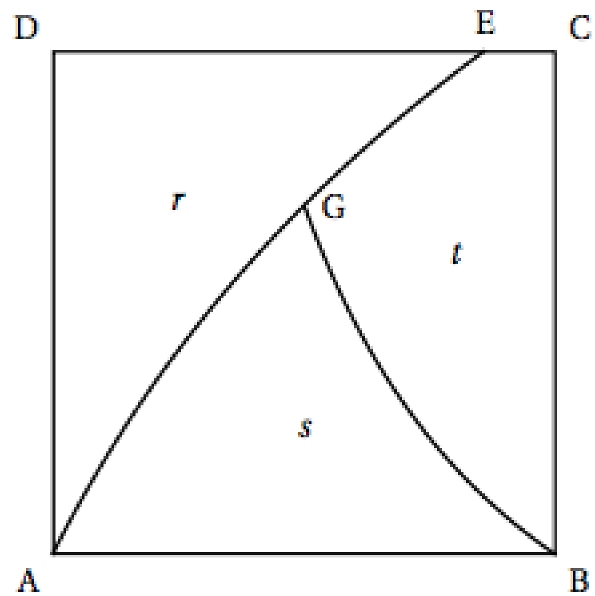
Le fabricant de cadenas de la marque « K »désire imprimer un logo pour son entreprise.
Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes :

- Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
  - une des lignes est le segment [AD] ;
  - une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment [DC] ;
  - la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.
- Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans h le carré doit être comprise entre $0,3$ et $0,4$, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \vec{\text{AB}}, \vec{\text{AD}}\right)$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.
Déterminer les coordonnées des points E et G.

Partie B : étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :
- la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par : $f(x) = \ln(2x+1)$;
- la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par : $g(x) = k\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$, où k est un réel positif qui sera déterminé.

1 **a.** Déterminer l'abscisse du point E.
b. Déterminer la valeur du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.

2 **a.** Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$F(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x.$$

b. Démontrer que $r = \dfrac{\text{e}}{2} - 1$.

3 Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0 \;:\; +\infty[$.

4 On admet que les résultats précédents permettent d'établir que
$s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2}$.
La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?

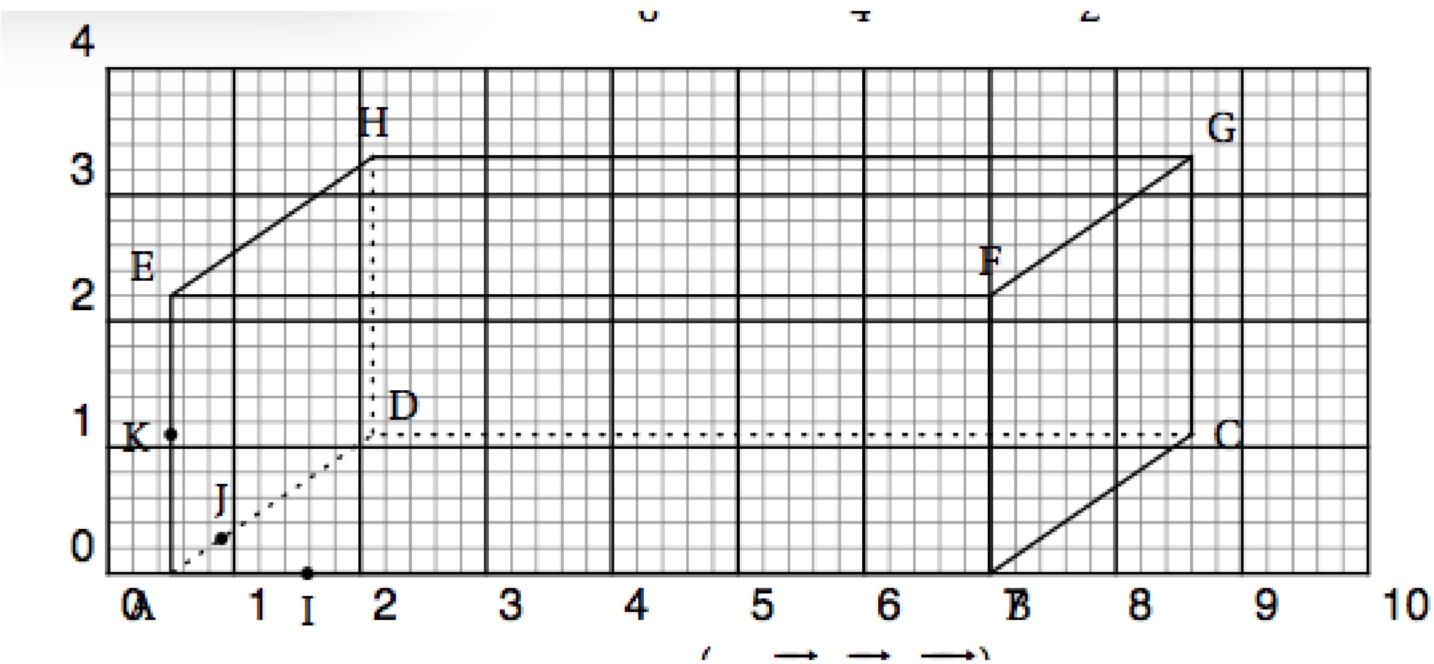
Baccalauréat S Polynésie 12 juin 2015

Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI},\,\overrightarrow{AJ},\,\overrightarrow{AK}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\2\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie**). On ne demande pas de justification.

Exercice 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2 Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

3 Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

4 Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

Exercice 3 — 3 points

Commun à tous les candidats

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type$\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.
Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

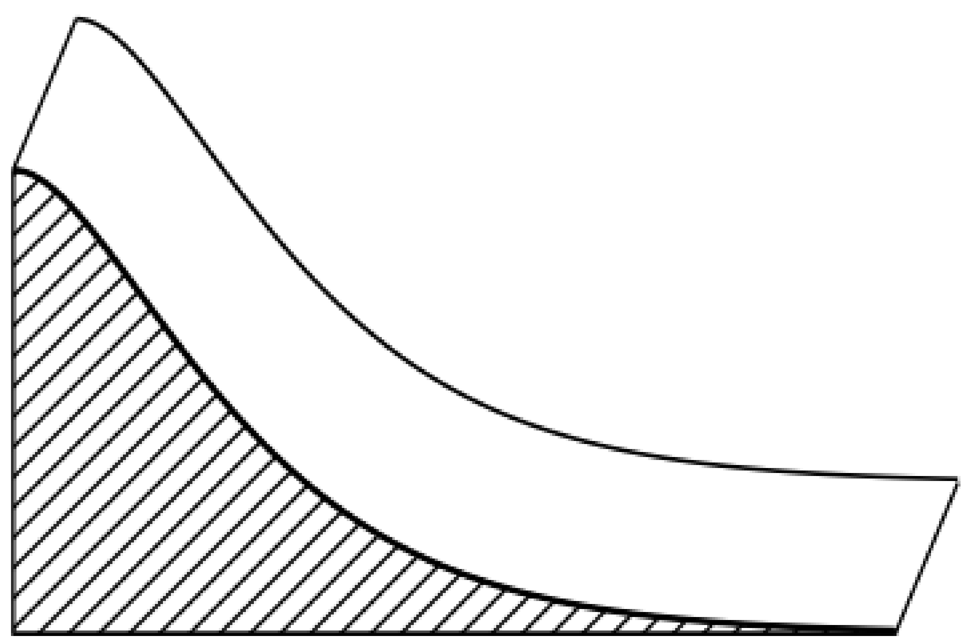
1 Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?

2
- **a.** Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.
- **b.** De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1,70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

Exercice 4 — 5 points

Commun à tous les candidats

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.
Voici ce schéma :

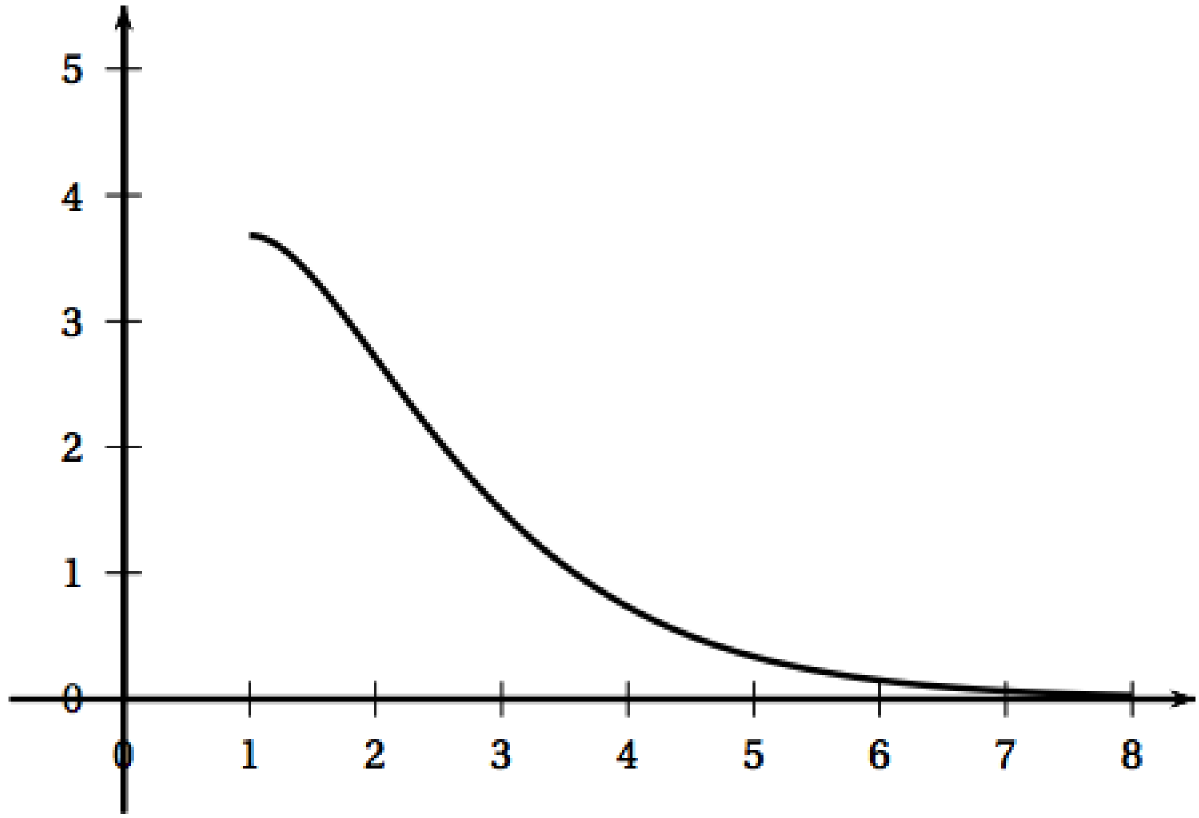


Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 8] par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1 On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
Déterminer la valeur de l'entier b.

2 On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre $3,5$ et 4 mètres de haut.
Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1\ ;\ 8]$ par

$$f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}.$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1 Soit g la fonction définie sur $[1\ ;\ 8]$ par

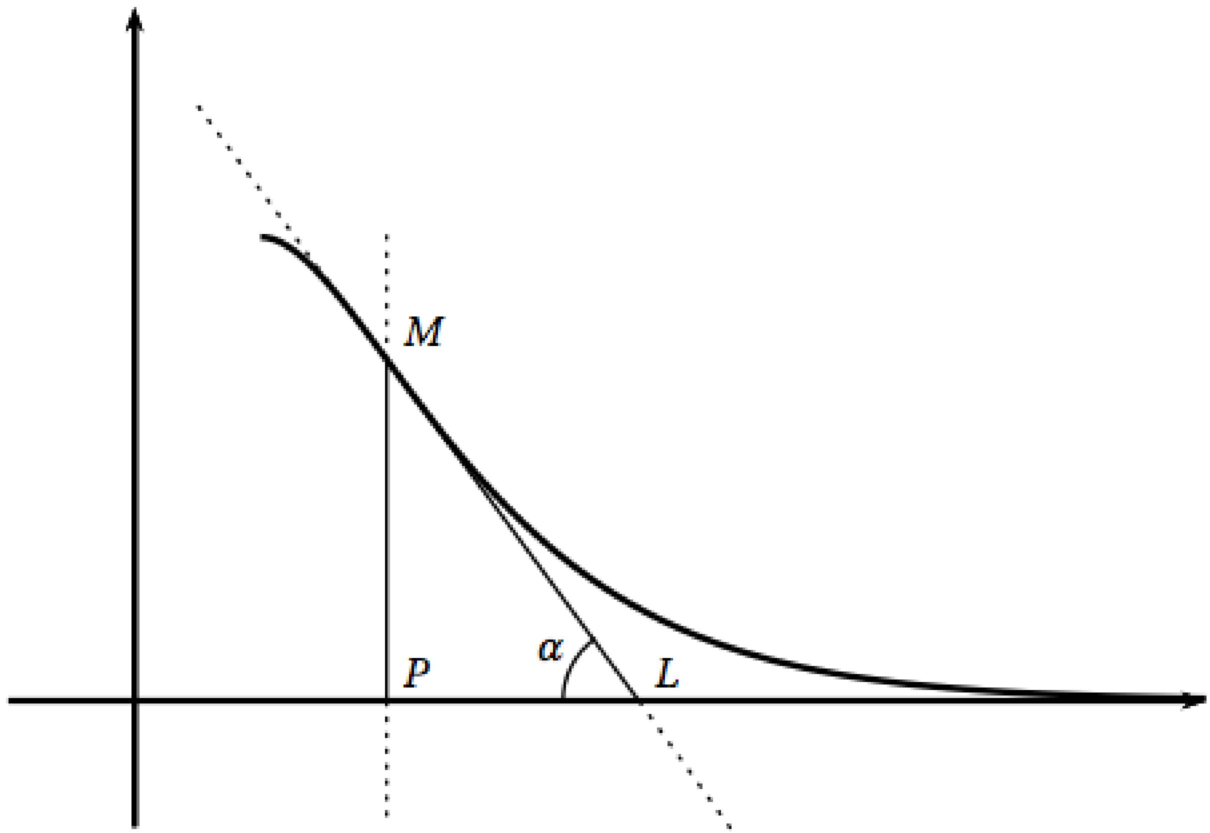
$$g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

2 Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1 On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,8]$, $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;\,8]$.

2 Soit x un réel de l'intervalle $]1\,;\,8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.

3 Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

Exercice 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.
On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1 Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur ...
	S prend la valeur ...
Traitement :	Pour k variant de ... à ... faire
	... prend la valeur ...
	... prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2 À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

1 Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

2 Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

3 Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (Sn)

1 Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.

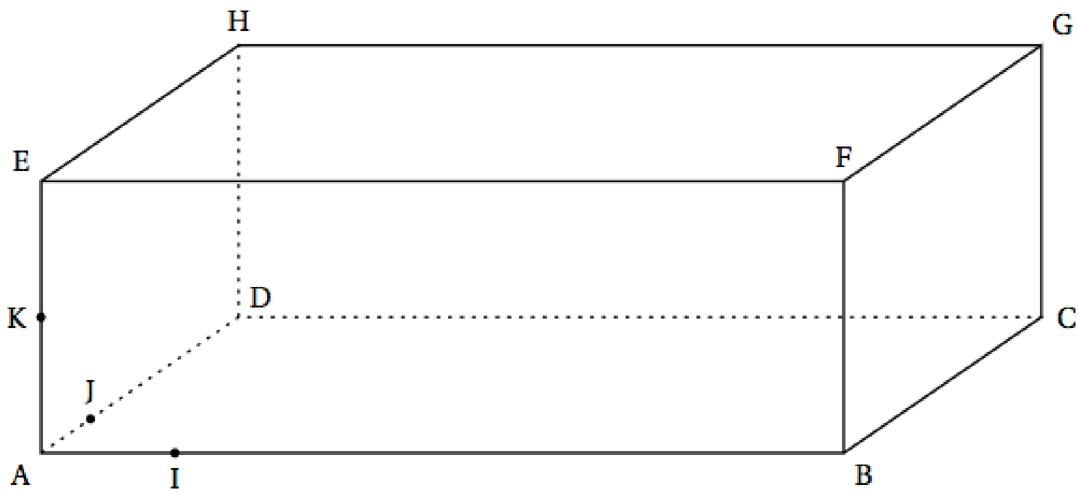
2 Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

3 Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

Annexe

À rendre avec la copie

EXERCICE 1


H
G
E
F
K
D
C
J
A
I
B