Nom :	DS	TS 2017	Déc. 2016
Prénom :		Devoir n° 03	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 — 2 points

2 pts

ROC

Pré-requis : Deux événements sont indépendants si et seulement si : $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$.

Montrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.
On décompose l'événement B suivant la partition $A, \overline{A}$.

$$B = (B\cap A)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)$$

$$\begin{aligned} p(B) &= p(B\cap A)+p\left(B\cap\overline{A}\right)\\ & p(A)\times p(B)+p\left(B\cap\overline{A}\right)\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} p\left(B\cap\overline{A}\right) &= p(B)-p(A)\times p(B)\\ &= p(B)\times 1-p(A)\times p(B)\\ &= p(B)\times(1-p(A))\\ &= p(B)\times p(\overline{A})\end{aligned}$$

Ayant $p\left(B\cap\overline{A}\right) = p(B)\times p(\overline{A})$, on a prouvé que les événements B et $\overline{A}$ sont indépendants.

Exercice 2 — 8 points

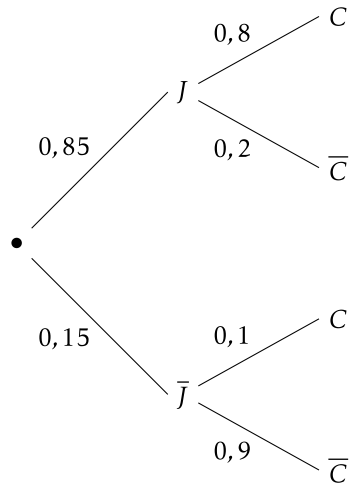
Huîtres

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate »et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.
Les huîtres sont dites de calibre n°3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.
Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n°3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1 Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur.
On suppose que toutes les huîtres ont la même chance d'être choisies. On considère les événements suivants :

- J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
- C : « l'huître prélevée est de calibre n°3 »,

1 pt **a.** Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
D'après l'énoncé on a : $P(\overline{J}) = 0,15, P_{\overline{J}}(C) = 0,1$ et $P_J(C) = 0,8$.



1 pt **b.** Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n°3.
$P(\overline{J} \cap C) = P(J) \times P_{\overline{J}}(C) = 0,15 \times 0,1 = 0,015$

$\boxed{\text{La probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n°3 est } P(\overline{J} \cap C) = 0,015.}$

2 pts **c.** Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n°3 est 0,695.
On décompose l'événement C suivant la partition $J, \overline{J}$.

$$C = (J \cap C) \cup \left(\overline{J} \cap C\right)$$

Comme cette union est disjointe, on a : $P(C) = P(J \cap C) + P(\overline{J} \cap C) = 0,85 \times 0,8 + 0,015 = 0,68 + 0,015 = 0,695$.

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir une huître de calibre n°3 est 0,695.}}$

1 pt **d.** Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n°3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?
On veut calculer la probabilité conditionnelle $P_C(\overline{J})$:

$$\begin{aligned} P_C(\overline{J}) &= \frac{P(C \cap \overline{J}}{P(C)} \\ &= \frac{0,015}{0,695} \\ &\approx 0,022 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_C(\overline{J}) = 0,022}$$

2 On choisit au hasard un échantillon de 15 huîtres dans le stock huîtres de cet ostréiculteur. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 15 huîtres dans le stock. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre d'huîtres de calibre n°3 de l'échantillon choisi.

1 pt **a.** Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
On répète 15 fois, de façon indépendante,l'expérience :
« On choisit au hasard une huître dans le stock de cet ostréiculteur. »qui comporte 2 issues :

- « L'huître est de calibre n°3 »considéré comme succès, de probabilité $p = 0,695$
- « L'huître n'est pas de calibre n°3 »considéré comme échec, de probabilité $q = 1 - p = 305$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,695$ notée $\mathscr{B}(15; 0,695)$.

Pour tout entier k où $0 \leq k \leq 15$, on a

$$P(X = k) = \binom{15}{k} \times (0,695)^k \times (0,305)^{15-k}$$

1 pt **b.** Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 6 huîtres de calibre n°3. On arrondira à 10^{-3}.
On calcule ici $P(X = 6) = \binom{15}{6} \times (0,695)^6 \times (0,305)^{15-k} = \text{binomFdp}(15, 0.695, 6) \approx 0,013$.

La probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 6 huîtres de calibre n°3 est $P(X = 6) \approx 0,013$.

1 pt **c.** Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins 9 huîtres de calibre n°3.On arrondira à 10^{-3}.
On calcule ici $P(X \geq 9)$:
$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - \text{binomFRép}(15, 0.695, 8) \approx 0,859$

La probabilité que cet échantillon comporte au moins 9 huîtres de calibre n°3 est $P(X \geq 9) \approx 0,859$.

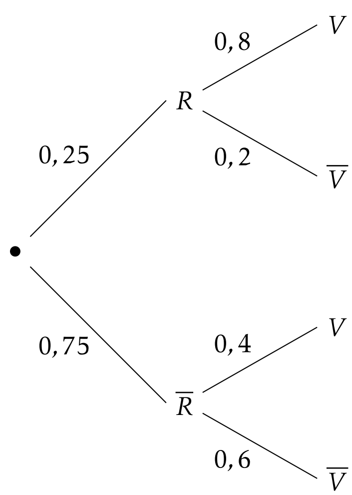
Exercice 3 **2 points**

2 pts **Vrai-Faux**
Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse et justifier soigneusement la réponse.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.
Affirmation : « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

Proposition : Vraie. On peut poser :

- R : "Jour où il pleut"
- V : "Zoé prend sa voiture"

D'après l'énoncé, on a : $P(R) = 0,25, P_R(V) = 0,8$ et $P_{\overline{R}}(\overline{V}) = 0,6$
On peut construire l'arbre suivant :



On décompose l'événement V suivant la partition :$V, \overline{V}$. $P(V) = P(R \cap V) + P(\overline{R} \cap V) = 0,25 \times 0,8 + 0,75 \times 0,4 = 0,2 + 0,3 = 0,5$

Zoé se rend bien un jour sur 2 à son travail en voiture.

Exercice 4 **3 points**

Ordinateurs
Dans un hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3.
On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle. On suppose que le nombre d'acheteurs parmi cet échantillon suit une loi binomiale.

1 pt **1** Déterminer le nombre moyen de personnes de cet échantillon qui ont acheté un ordinateur.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre d'acheteurs d'ordinateur parmi les personnes intéressées de l'échantillon.
X suit alors la loi binomiale $\mathscr{B}(10; 0,3)$.
Le nombre moyen de personnes qui ont acheté un ordinateur correspond à l'espérance mathématique de X
$E(X) = np = 10,3 = 3$

En moyenne, il y a trois acheteurs dans l'échantillon.

2 pts **2** Quelle est la probabilité, dans cet échantillon, qu'entre 3 et 6 personnes aient acheté un ordinateur ? (on donnera le résultat à 10^{-3}.

$P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2) = \text{binomFRép}(10, 0.3, 6) - \text{binomFRép}(10, 0.3, 2) \approx 0,607$

Il y a à peu plus de 60 % de chance que dans l'échantillon entre 3 et 6 personnes aient acheté un ordinateur !

Paul

Exercice 5 **10,5 points**

D'après le bac
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = -1 \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n};$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)$
On pourra poser éventuellement $f(x) = e^{2x} - e^x$.

1 Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x$$

1.5 pt **a.** Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x :

$$g(x) = \left(e^x - 1\right)\left(2e^x + 1\right)$$

On dérive avec : $(e^u)' = u'e^u$, on obtient $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$
On développe la quantité proposée : $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2(e^x)^2 + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1 = g'(x)$

1 pt **b.** Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ alors $2e^x + 1 > 1 > 0$. Donc :

- $$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\iff e^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x = e^0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

- Signe de $g'(x)$ = signe de $e^x - 1$, comme la fonction exp est croissante, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff e^x - 1 > 0 \\ &\iff e^x > e^0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(0) = e^0 - e^0 - 0 = 1 - 1 = 0$

1.5 pt **2** **a.** En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).
$u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$
D'après la question 1) b), $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, g(u_n) > 0 \iff u_{n+1} - u_n > 0$.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

2.5 pts **b.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel$n, u_n \leq 0$

- **Initialisation :** comme $u_0 = -1$; on a $u_0 \leq 0$, la propriété est vraie au rang 0.
- **Transmission de l'hérédité :**Soit k un entier fixé, $k \geq 0$, on suppose que $u_k \leq 0$, on doit prouver que $u_{k+1} \leq 0$
On utilise l'écriture $u_{k+1} = e^{u_k}(e^{u_k} - 1)$

$$\begin{array}{rll} u_k & \leq 0 & \text{HR} \\ e^{u_k} & \leq e^0 & \text{en appliquant la fonction } exp \\ & & \text{strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ e^{u_k} & \leq 1 & \\ e^{u_k} - 1 & \leq 0 & \end{array}$$

On a ainsi, comme $e^{u_k} > 0$, $e^{u_k}(e^{u_k} - 1) \leq 0$
Soit $u_{k+1} \leq 0$
- **Conclusion :** On a donc vérifié que la propriété est vraie au rang 0 et qu'il y a transmission de l'hérédité ; le théorème de récurrence s'appliquant, on a pour tout $n \geq 0; u_n \leq 0$

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc majorée par 0.}}$

1 pt **c.** Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ inconnu.
La suite (u_n) est croissante et majorée par 0, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ.
Par ailleurs, comme pour tout $n \geq 0$; $u_n \leq 0$; on déduit par passage à la limite dans les inégalités :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 0$, soit $\ell \leq 0$.

1 pt **d.** Montrer que la limite ℓ vérifie l'équation :$g(x) = 0$. En déduire la limite ℓ .
On pose $f(x) = e^{2x} - e^x$.
La suite (u_n), définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, est convergente vers $\ell \leq 0$. La fonction f est continue sur $]-\infty; 0]$ par produit et somme de fonctions continues,

- comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ (1)
- or $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (2)
- De (1) et (2) et de l'unicité de la limite on déduit $f(\ell) = \ell$

ℓ vérifie donc l'équation $f(x) = x$:

$$f(x) = x \iff e^{2x} - e^x = x \iff e^{2x} - e^x - x = 0 \iff g(x) = 0$$

D'après l'étude de la fonction g à la question 1) b), l'équation $g(x) = 0$ admet 0 comme unique solution donc $\ell = 0$.

3 L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que : $|u_n| < 10^{-p}$, où p désigne un entier positif.

1 pt **a.** Sur la copie, recopier la partie « Traitement »en la complétant.
Voici algorithme complété.

	n, p : entiers u : réel .
Entrées et Initialisation :	Saisir la valeur de p
	n prend la valeur 0
	u prend la valeur -1
Traitement :	Tant que $\lvert u\rvert \geq 10^{-p}$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $e^{2u} - e^{u}$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

1 pt **b.** À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur affichée par cet algorithme pour $p = 2$.
On trouve alors $n = 64$