Lycée l'Oiselet **Mardi 31 janvier 2017**

BACCALAURÉAT BLANC 2017 DE MATHÉMATIQUES – SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7

Le candidat doit traiter les quatre exercices. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : Mathématiques, Sciences Physiques , SVT, ISN ou Sciences de l'Ingénieur.*
- *votre classe : Terminale S1 ou Terminale S2 ou …*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages.

Exercice 1

Commun à tous les candidats **3 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie.
On ne demande pas de justification.
Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Question 1

Le réel $A = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$ vaut :

a. 0 **b.** $\cancel{4}$ **c.** $\cancel{\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}}$ **d.** $\cancel{\ln 4}$

$$\begin{aligned}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right) &= \ln\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\\ &= \ln\left(2^2-\sqrt{3}^2\right)\\ &= \ln 1\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{A = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right) = 0}$$

Question 2

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)-x$ a pour fonction dérivée la fonction f' définie par :

a. $f'(x) = -\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ **b.** $\cancel{f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{x^2+1}}$

c. $\cancel{f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}-1}$ **d.** $\cancel{f'(x) = 2x\ln\left(x^2+1\right)-1}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x}{x^2+1}-1\\ &= \frac{2x}{x^2+1}-\frac{x^2+1}{x^2+1}\\ &= \frac{2x-x^2-1}{x^2+1}\\ &= -\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}\\ &= -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}\end{aligned}$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)-x$ a pour fonction dérivée la fonction f' définie par : $f'(x) = -\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

Question 3

L'équation $\ln(x+1)-\ln(x+3) = 0,5$ a pour ensemble de solution :

a. $\cancel{\mathcal{S} = \{0,5\}}$ **b.** $\cancel{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3e^{0,5}-1}{1-e^{0,5}}\right\}}$ **c.** $\cancel{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3e^{0,5}+1}{1-e^{0,5}}\right\}}$ **d.** $\mathcal{S} = \emptyset$

L'équation a un sens ssi

$$\left\{\begin{array}{l} x+1>0\\ x+3>0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x>-1\\ x>-3\end{array}\right.$$

$D =]-1;+\infty[$

$$\begin{aligned}
\text{Sur } D \ \ln(x+1)-\ln(x+3)=0,5 &\iff \ln(x+1)=\ln(x+3)+0,5\\
&\iff \ln(x+1)=\ln(x+3)+\ln(e^{0,5})\\
&\iff \ln(x+1)=\ln\left((e^{0,5}(x+3)\right) \qquad \text{car } \ln a+\ln b=\ln ab\\
&\iff x+1=e^{0,5}(x+3)\\
&\iff x+1=xe^{0,5}+3e^{0,5}\\
&\iff x-xe^{0,5}=3e^{0,5}-1\\
&\iff x\left(1-e^{0,5}\right)=3e^{0,5}-1\\
&\iff x=\frac{3e^{0,5}-1}{1-e^{0,5}}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{3e^{0,5}-1}{1-e^{0,5}} \approx -6,08$, donc ce nombre n'appartenant pas au domaine,n'est pas solution.

L'équation $\ln(x+1)-\ln(x+3)=0,5$ a pour ensemble de solution :$\mathcal{S}=\emptyset$

Question 4

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$. La tangente T à la représentation graphique de f au point d'abscisse 1 a pour équation :

a. $\cancel{y=x-1}$ **b.** $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ **c.** $\cancel{y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$ **d.** $\cancel{y=0}$

La tangente T à la représentation graphique de f au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $f=\dfrac{u}{v}$ d'où $f'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $]0;+\infty[$: $\begin{cases} u(x) &= \ln x\\ v(x) &= x+1\end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= \dfrac{1}{x}\\ v'(x) &= 1\end{cases}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}\times(x+1)-1\times\ln x}{(x+1)^2}\\
&= \frac{1+\dfrac{1}{x}+\ln x}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{\ln 1}{2}=0\\
f'(1) &= \frac{1+1+\ln 1}{(1+1)^2}\\
&= \frac{2}{4}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc $T : y=\dfrac{1}{2}(x-1)+0$

soit $T : y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

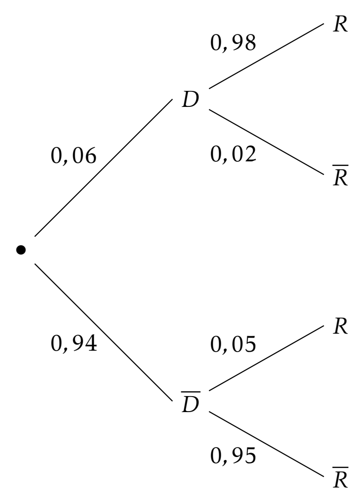
Exercice 2

Commun à tous les candidats **4, 5 points**

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.
Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

- D l'évènement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'évènement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1 Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.



D'après l'énoncé, $p(D) = 0,06$, $p_D(R) = 0,98$ et $p_{\overline{D}}(R) = 0,05$.

2 **a.** Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.
On veut ici calculer $p(D \cap \overline{R})$:

$$\begin{aligned} p(D \cap \overline{R}) &= p(D) \times p_D(\overline{R}) \\ &= 0,06 \times 0,02 \\ &= 0,0012 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(D \cap \overline{R}) = 0,0012}$$

b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.

Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
Notons E : « il y a une erreur de contrôle. »
$E = \left(D \cap \overline{R}\right) \cup \left(\overline{D} \cap R\right)$
Cette union est disjointe, donc

$$\begin{aligned} p(E) &= p(D \cap \overline{R}) + p(\overline{D} \cap R) \\ &= 0,0012 + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(R) \\ &= 0,0012 + 0,94 \times 0,05 \\ &= 0,0482 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est environ de 5\%.}}$

3 Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.

On utilise ici la partition $D, \overline{D}$:
$\overline{R} = \left(D \cap \overline{R}\right) \cup \left(\overline{D} \cap \overline{R}\right)$,

Cette union est disjointe donc :

$$\begin{aligned} p(\overline{R}) &= p(D \cap \overline{R}) + p(\overline{D} \cap \overline{R}) \\ &= p(D \cap \overline{R}) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(\overline{R}) \\ &= 0,0012 + 0,94 \times 0,95 \\ &= 0,8942 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(\overline{R}) = 0,8942}$$

4 Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.
Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.
Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.
On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

On recherche tout d'abord les valeurs possibles de G :

- Si le lecteur est détruit $G = -50$€.
- Si le lecteur est commercialisé sans le logo $G = 10$ $(60 - 50)$€.
- Si le lecteur est commercialisé avec le logo de l'entreprise $G = 70$ $(120 - 50)$€.

Pour un lecteur MP3 on répète 4 fois, de façon indépendante,l'expérience « on soumet le lecteur à l'unité de contrôle. » qui comporte 2 issues :

- « Le lecteur est rejeté » considéré comme succès, de probabilité $p = p(R) = 1 - 0,8942 = 0,1058$
- « Le lecteur est accepté » considéré comme échec, de probabilité $q = p(\overline{R}) = 0,8942$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres 4 et $0,1058$ notée $\mathscr{B}(4;0,1058)$.

Pour tout entier k où $0 \leq k \leq 4$, on a :

$$P(X = k) = \binom{4}{k} \times (0,1058)^k \times (0,8942)^{4-k}$$

On calcule alors la probabilité de chaque événement :

- $p(G = 70) = p(X = 0) = \binom{4}{0} \times 0,1058^0 \times 0,8942^4 \approx 0,6393$
- $p(G = 10) = p(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0,1058^1 \times 0,8942^3 \approx 0,3026$
- $p(G = -50) = 1 - p(G = 70) - p(G = 10) = 0,058$
  ou $p(G = -50) = p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X \leq 1) \approx 1 - 0,9419 \approx 0,058$

On rappelle à cette occasion :

2nd DISTR A binomFdp(4 , 0.1058 , 1)

binomFdp$(4, 0.1058, 1) \approx 0.3026$. Ceci calcule $P(X = 1)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4, 0.1058)$

2nd DISTR B binomFRép(4 , 0.1058 , 1)

binomFRép$(4, 0.1058, 1) \approx 0,9419$. Ceci calcule $P(X \leq 1)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4, 0.1058)$

La loi de G est donc donnée par le tableau ci-dessous :

g_i	-50	10	70	Total
p_i	0,058	0,3026	0,6393	1

b. Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{i=1}^{3} p_i g_i \\ &= -50 \times 0,058 + 10 \times 0,3026 + 70 \times 0,6393 \\ &\approx 44,88 \end{aligned}$$

$E(G) = 44,89$ €.
Cela signifie qu'en moyenne on peut compter sur un bénéfice de 4 4,88 €par lecteur produit.

Exercice 3

Commun à tous les candidats **5,5 points**

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1 Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).

En déduire le signe de $g(x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$.

On étudie alors le signe de la dérivée :

- $g'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff e^x = 1 \iff x = \ln 1 \iff x = 0$
- $g'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > \ln 1 \iff x > 0$

On déduit le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	2	$\nearrow$	
Signe de $g(x)$		$+$		$+$	

$g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$

On déduit que g est strictement positive sur $\mathbb{R}$, en effet g présente un minimum strictement positif en 0 qui vaut 2.

2 Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$: On écrit $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x} = x + 1 + x \times \dfrac{1}{e^x}$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty \end{array}\right\} \text{Par produit } \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} x + 1 = -\infty \end{array}\right\} \text{Par somme } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

- Limite en $+\infty$: on sait d'après une limite de référence $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$,

  donc par inverse $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

  $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3 On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x).$$

On écrit $f(x) = x + 1 + x\mathrm{e}^{-x}$;
ainsi $f = u + vw$
donc $f' = u' + v'w + w'v$

$$\text{Pour tout réel } x \text{, dans } \mathbb{R} : \begin{cases} u(x) &= x+1 \\ v(x) &= x \\ w(x) &= \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{ainsi : } \begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= 1 \\ w'(x) &= -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a utilisé le résultat $(\mathrm{e}^a)' = a'\mathrm{e}^a$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-\mathrm{e}^{-x})x \\ &= 1 + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} \\ &= \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x} - x + 1) \\ &= \mathrm{e}^{-x} g(x) \end{aligned}$$

4 En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
On étudie le signe de la dérivée :

- D'après la question 1) pour tout réel x, on a $g(x) > 0$.
- La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$
- Par produit on déduit pour tout réel x, on a $f'(x) > 0$.

On déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
Variations de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

D'après le théorème de la bijection :

- ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I =]-\infty; +\infty[$.
- ✍ f est strictement croissante sur l' intervalle $I =]-\infty; +\infty[$.

✍ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

✍ f réalise donc une bijection de $]-\infty;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$
Comme $0 \in]-\infty;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $]-\infty;+\infty[$.

- $f(-1) = -1 + 1 - \mathrm{e}^1 = -\mathrm{e}$
- $f(0) = 0 + 1 - 0 \times \mathrm{e}^0 = 1$
- On a donc $f(-1) < 0 < f(0)$,
  soit $f(-1) < f(\alpha) < f(0)$,
  comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on déduit $-1 < \alpha < 0$.

6

a. Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

- $f(0) = 1$
- $f'(0) = g(0) = 2$

T a pour équation $y = 2(x-0) + 1$.

$\boxed{\text{T : } y = 2x + 1 \text{ est tangente à la courbe } \mathcal{C} \text{ au point d'abscisse } 0.}$

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.

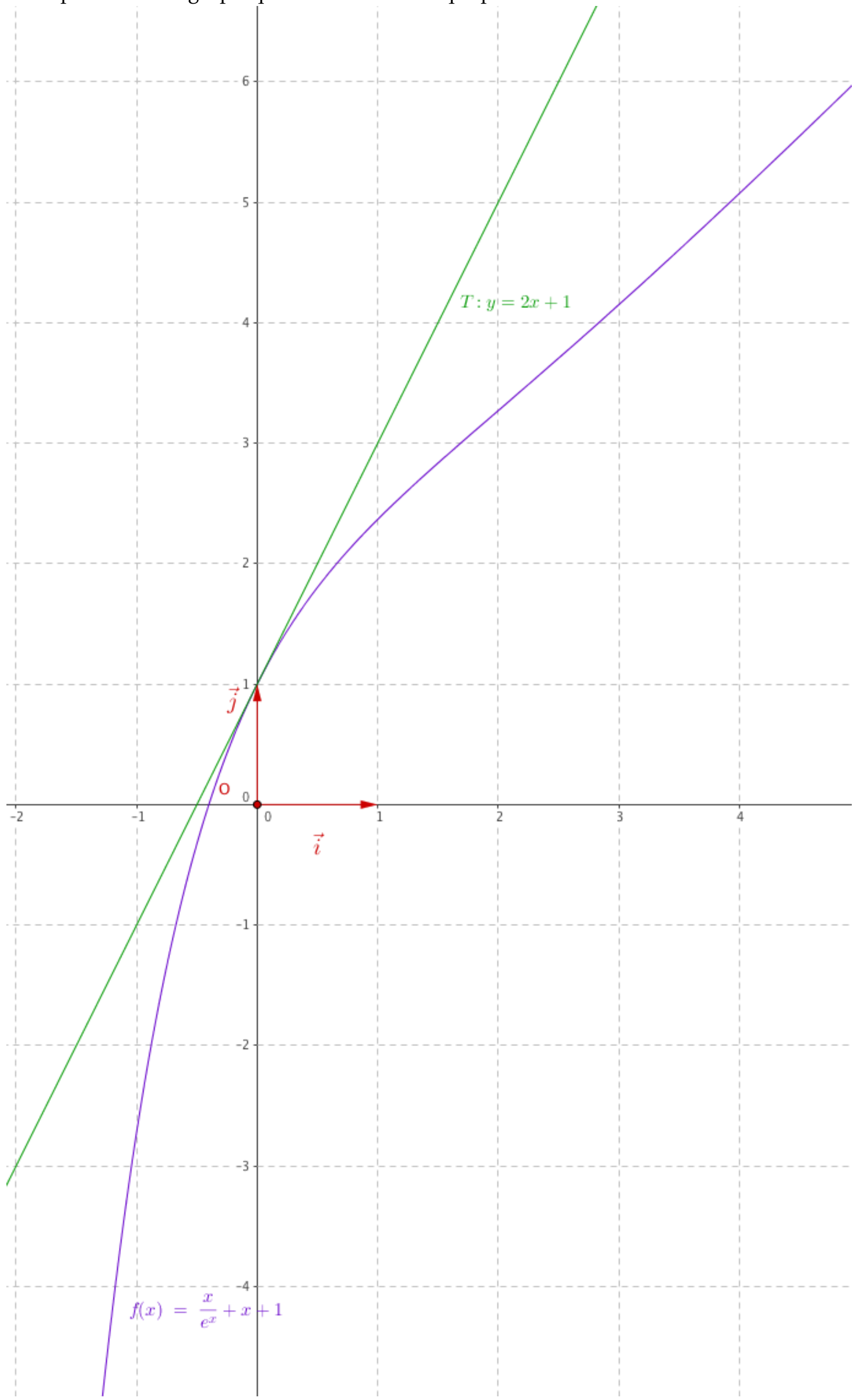
Le signe de $y_{\mathcal{C}} - y_T = f(x) - (2x+1)$, nous renseigne donc la position relative de $\mathcal{C}$ et T :

$$\begin{aligned} f(x) - (2x+1) &= x + 1 + x\mathrm{e}^{-x} - 2x - 1 \\ &= x\mathrm{e}^{-x} - x \\ &= x(\mathrm{e}^{-x} - 1) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$	
signe de $(\mathrm{e}^{-x} - 1)$ ♡		$+$	0	$-$	
signe de $h(x) = y_{\mathcal{C}} - y_T$		$-$	0	$-$	
Position relative		$\mathcal{C}$ en -dessous de T	$\mathcal{C}$ et T ont un point commun	$\mathcal{C}$ en -dessous de T	

♡ En effet $\mathrm{e}^{-x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-x} > 1 \iff \ln \mathrm{e}^{-x} > \ln 1 \iff -x > 0 \iff x < 0$

Une représentation graphique non demandée qui permet de valider les résultats obtenus.



Exercice 4

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1 Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

On calcule la dérivée et on étudie son signe : comme $f(x) = -4 \times \dfrac{1}{x+2}$, on utilise $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

Ainsi $f'(x) = -4 \times \left(-\dfrac{1}{(x+2)^2}\right)$

$$\boxed{f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}}$$

Le carré d'un réel non nul est strictement positif, ainsi $\left.\begin{array}{c} 4>0 \\ \text{Si } x \geq 0\ (x+2)^2 > 0 \end{array}\right\}$ donc $f'(x) > 0$.

On déduit que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2 Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On note α la solution. On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\iff 5 - \frac{4}{x+2} = x \\ &\iff 5 - x = \frac{4}{x+2} \\ &\iff (5-x)(x+2) = 4 \\ &\iff -x^2 + 3x + 10 - 4 = 0 \\ &\iff x^2 - 3x - 6 = 0 \end{aligned}$$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 33$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{33}}{2}$$

Comme $x_2 < 0$, seul x_1 est solution sur $[0;+\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ sur l'intervalle } [0\,;\,+\infty[\text{ a pour unique solution } \alpha = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4,37}$$

3 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

La suite (u_n) semble croissante. Par ailleurs on conjecture que la suite (u_n) converge vers α.

4 **a.** Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

où α est le réel défini dans la question 2.

Notons $\pi(n)$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

- Initialisation : $u_1 = 5 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{11}{3} \approx 3,67$, et comme $\alpha \approx 4,37$, on donc $0 \leq 1 \leq \dfrac{11}{3} \leq \alpha$.
  on a bien
  $$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$$
  Ainsi $\pi(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $k \geq 0$, on suppose que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \alpha$
  comme la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on déduit :
  $$f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(\alpha)$$
  soit
  $$3 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \alpha$$
  En effet $u_{n+1} = f(u_n)$. et α est solution de l'équation $f(x) = x$, donc $f(\alpha) = \alpha$.
  On a donc
  $$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \alpha$$
  La propriété $\pi(n)$ est donc héréditaire.
- Conclusion : $\pi(0)$ est vraie, et la propriété $\pi(n)$ est héréditaire. Le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a :
  $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

- Ayant pour tout entier n ; $u_n \leqslant u_{n+1}$, la suite (u_n) est croissante.
- Ayant pour tout entier n ; $u_n \leqslant \alpha$, la suite (u_n) est majorée par α.

la suite (u_n) est croissante et majorée ; elle est donc convergente.

5 Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

a. Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.
On a successivement

$$\begin{aligned} u_1 &= 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} \\ u_2 &= 5 - \frac{4}{\frac{11}{3} + 2} = 5 - \frac{12}{17} = \frac{73}{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0 = 1 \\ S_1 &= u_0 + u_1 = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3} \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 = S_1 + u_2 = \frac{14}{3} + \frac{73}{17} = \frac{457}{51} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_0 = 1 ; S_1 = \frac{14}{3} \text{ et } S_2 = \frac{457}{51}}$$

b. Compléter l'algorithme donné en **annexe** 2 pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

Annexe 2 de l'exercice 2 à rendre avec la copie

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que $i < n$
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur $5 - \frac{4}{u+2}$
	Affecter à s la valeur $s+u$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s.

Un test de cet algorithme sur calculatrice TI :

c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

On a prouvé que la suite (u_n) est croissante, ainsi pour tout entier n , $u_n \geq u_0$, soit $u_n \geq 1$.

$$\begin{array}{ll} u_0 & \geq 1 \\ u_1 & \geq 1 \\ u_2 & \geq 1 \\ \cdots & \cdots \\ u_n & \geq 1 \end{array}$$

En ajoutant membre à membre ces $n+1$ inégalités de même sens, on obtient :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \geq n+1$$

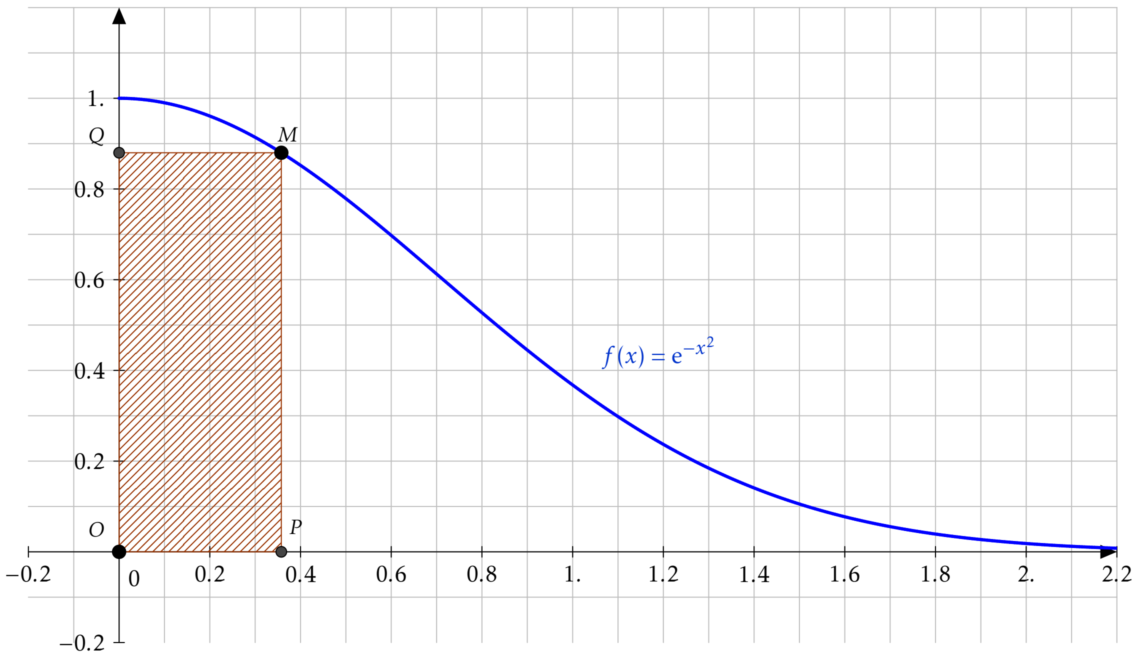
soit $S_n \geq n+1$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$, on déduit grâce au théorème de minoration :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$$

Exercice 5

Commun à tous les candidats **2 points**

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathcal{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathcal{C}_f$?

  L'aire du rectangle OPMQ vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(OPMQ) &= OP \times PM\\ &= xf(x)\\ &= x\mathrm{e}^{-x^2}\\ &= g(x)\end{aligned}$$

  $g(0) = 0$

  $g(1) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0,36$

$$\boxed{g(0) \neq g(1),\text{ donc l'aire du rectangle O}PMQ\text{ n'estpas constante.}}$$

- [•] L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?

  On étudie les variations de g sur l'intervalle $[0;+\infty[$:
  g est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  $g = uv$, d'où $g' = u'v+v'u$ avec pour tout réel x, dans $[0;+\infty[$: $\left\{\begin{array}{ll} u(x) &= x\\ v(x) &= \mathrm{e}^{-x^2}\end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) &= 1\\ v'(x) &= -2x\mathrm{e}^{-x^2}\end{array}\right.$

$$\begin{aligned}g'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x^2} + x \times (-2x\mathrm{e}^{-x^2})\\ &= \mathrm{e}^{-x^2}(1-2x^2)\end{aligned}$$

  Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $g'(x)$ a le signe de $(1-2x^2)$.

  - $g'(x) = 0 \iff 1-2x^2 = 0 \iff x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $1-2x^2$ est un trinôme du second degré qui a pour racines $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; il a donc le signe de $a=-2$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
signe de $1-2x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On déduit le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

L'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; le point M a alors pour coordonnées $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$. Le maximum de l'aire du rectangle $OPMQ$ est $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\approx 0,43$.