



1. Une fonction ln

exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x .

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) [\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
- 2(a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie C

Soit \mathcal{C}' la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}$.
En déduire que les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2} [\ln(x)]^2$$

est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Calculer $I = \int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Suites, récurrence, limites, algorithmique

exercice 2

7 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x.$$

- Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.
- Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
- En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 0$.
- Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
- Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n) .

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq a$.

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :
 $u_n \geq a + n \times g(a)$.
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que Fin tant que
Sortie	Afficher n

- Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.
- À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

3. Probabilités

exercice 3

Commun à tous les candidats

Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang. On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 ng.mL^{-1} .

Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- M l'évènement « le patient est atteint par la maladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

On admet que :

- 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;
- 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif.

On sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1. Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de 0,325.
2. Calculer $P_{\bar{D}}(M)$. Interpréter ce résultat.
3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez-vous ?

On choisit au hasard 10 personnes dans la population. On suppose que la population de ce pays est suffisamment importante pour que le tirage soit assimilé à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité qu'au moins une des personnes choisies ait un dépistage positif ?

4. Fonction exponentielle

exercice 4

7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = xe^{1-x^2}$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0,

$$f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}.$$

On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

- 2(a) On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa dérivée. Démontrer que pour tout réel x ,

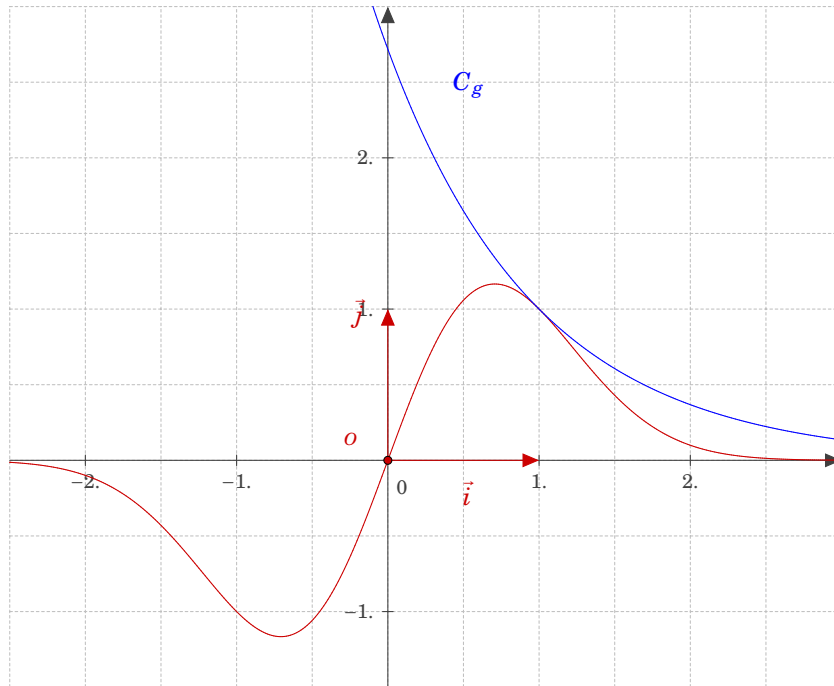
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{1-x^2}.$$

- (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f .

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = e^{1-x}$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g .



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre?
 2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty ; 0]$, $f(x) < g(x)$.
 3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
- (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leq g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leq 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

- (b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ . (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
- (c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leq 0$.
- 4(a) La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide?
- (b) Montrer que C_f et C_g ont un unique point commun, noté A .
- (c) Montrer qu'en ce point A , ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 (e^{1-x} - xe^{1-x^2}) dx$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

5. Suite, algorithmique, limite, suites arithmético-géométriques

exercice 5

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement	: Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape. Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p .
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	-0,5	-0,75	-0,375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?

Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n .
5. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n) .

6. Probabilités

exercice 6

Commun à tous les candidats

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;

J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x .
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ». Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

7. Prise d'initiative

exercice 7

3 points

Commun à tous les candidats

Pour chaque réel a , on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a.$$

1. Montrer que pour tout réel a , la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

