Correction de l'exercice 1

1. f est une somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$: elle est donc dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
Comme on travaille sur $]0;+\infty[$; on a $x > 0$ donc $\dfrac{1}{x} > 0$ ainsi $\dfrac{1}{x} + 1 > 1 > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.

2. En appliquant le théorème de la bijection sur $]0~;~+\infty[$:

- f est continue sur $I =]0;+\infty[$ (elle est dérivable sur I) ;
- f est strictement croissante sur I ;
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

donc f réalise une bijection de $]0~;~+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$.
Comme $0 \in]-\infty;+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans I

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0~;~+\infty[$.

3. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 < 0.$

$f(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1 > 0.$

On a : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0,~ f(1) > 0$ et f strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$, donc

$\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1.$

4. Donc au centième près : $0,56 \leqslant \alpha \leqslant 0,57$.

Correction de l'exercice 2

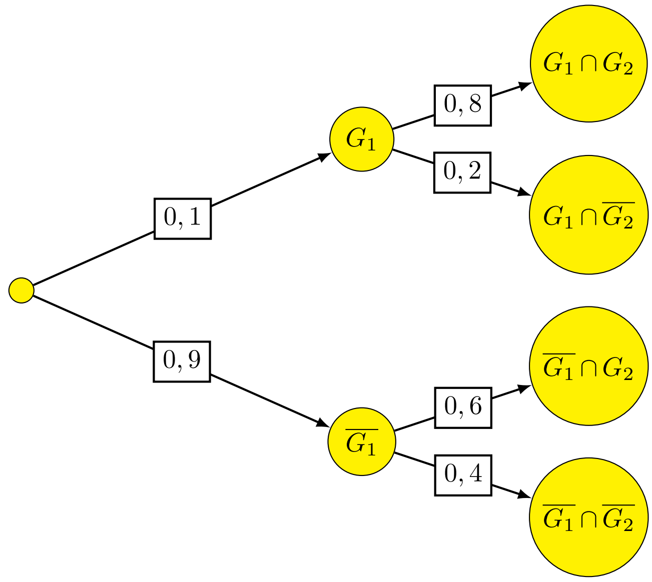
Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.

On admet que :
- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :
- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. On a l'arbre pondéré suivant :



On a $p_2 = p\left(\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{G}_2\right) + p\left(\overline{\mathrm{G}_1} \cap \mathrm{G}_2\right) = p\left(\mathrm{G}_1\right) \times p_{\mathrm{G}_1}\left(\mathrm{G}_2\right) + p\left(\overline{\mathrm{G}_1}\right) \times p_{\overline{(\mathrm{G}_1)}}\left(\mathrm{G}_2\right) =$

$p_2 = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$.

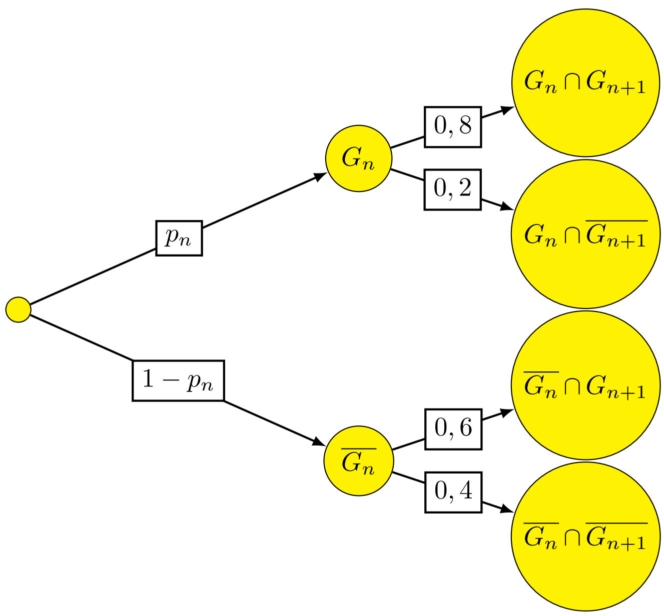
2. Il faut trouver $p_{\mathrm{G}_2}\left(\overline{\mathrm{G}_1}\right) = \dfrac{p\left(\overline{\mathrm{G}_1} \cap \mathrm{G}_2\right)}{p\left(\mathrm{G}_2\right)} = \dfrac{0,54}{0,62} = \dfrac{27}{31}$.

3. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$.

La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à

$1 - 0,144 = 0,856$.

4. À la partie n, on a l'arbre suivant :



On a donc $p_{n+1} = p\left(\mathrm{G}_n \cap \mathrm{G}_{n+1}\right) + p\left(\overline{\mathrm{G}_n} \cap \mathrm{G}_{n+1}\right) = p\left(\mathrm{G}_n\right) \times p_{\mathrm{G}_n}\left(\mathrm{G}_{n+1}\right) + p\left(\overline{\mathrm{G}_n}\right) \times p_{\overline{\mathrm{G}_n}}\left(\mathrm{G}_{n+1}\right) = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 =$
$0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6 = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.

5. Initialisation On a bien $\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{20} = \dfrac{15 - 13}{20} = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10} = 0,1 = p_1$.

Hérédité

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ tel que $p_a = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^a$.

D'après la formule démontrée à la question 4 :

$p_{a+1} = \dfrac{1}{5}p_a + \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}\left[\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^a\right] + \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1} = \dfrac{3}{20} + \dfrac{12}{20} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1}$. La propriété est vraie au rang $a+1$.

On a donc démontré par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

6. Comme $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

7. On a : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \iff \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right) < 10^{-7} \iff \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \iff \left(\dfrac{1}{5}\right)^n < \dfrac{4}{13}\times 10^{-7} \iff$ (par stricte croissance de la fonction logarithme népérien) $n\ln\left(\dfrac{1}{5}\right) < \ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right) \iff n > \dfrac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)}$.

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)} \approx 10,7$.

Donc u_{11} approche la limite $\dfrac{3}{4}$ à moins de 10^{-7}.

Correction de l'exercice 3

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

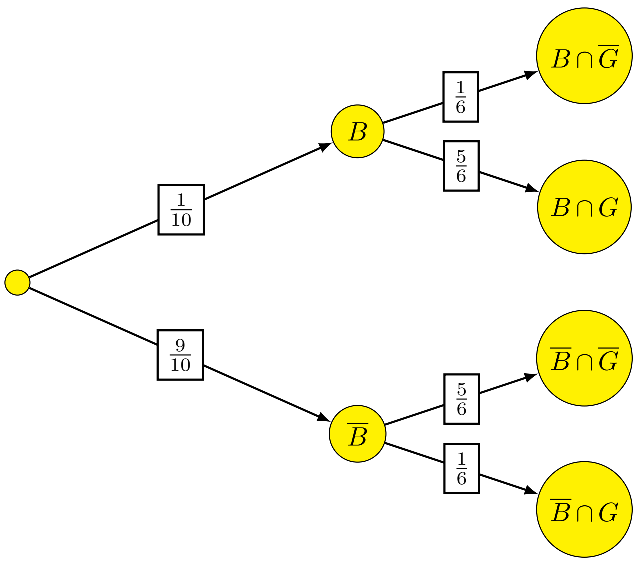
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :
- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\text{E}}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\text{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\text{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
Les jetons sont indiscernables au toucher et le dé est équilibré, le choix se fait au hasard, donc pour tout événement E, on a $p(E) = \dfrac{Card(E)}{Card(\Omega)}$.



Calculer la probabilité de l'événement G.
$G = (B\cap G)\cup\left(\overline{B}\cap G\right)$.
La formule des probabilités totales donne $p(G) = p\left(B\cap G\right) + p\left(\overline{B}\cap G\right) = p(B)\times p_B(G) + p(\overline{B})\times p_{\overline{B}}(G)$
soit $p(G) = \frac{1}{10}\times\frac{5}{6} + \frac{9}{10}\times\frac{1}{6} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}$

$\boxed{p(G) = \frac{7}{30}}$

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

On veut calculer la probabilité conditionnelle $p_{\overline{G}}(B) = \dfrac{p(B \cap \overline{G})}{p(\overline{G})} = \dfrac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{7}{30}}$

$\boxed{p_{\overline{G}}(B) = \frac{1}{46} \approx 0.022}$

3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. (c'est-à-dire : les probabilités sont identiques à chaque partie).

On est en présence d'un schéma de Bernoulli :
Succès : « le joueur gagne la partie »avec la probabilité $p = \frac{7}{30}$

Echec : « le joueur perd la partie »avec la probabilité $q = 1 - p = \frac{23}{30}$
On répète 4 fois cette expérience de façon indépendante et on considère la variable aléatoire N qui comptabilise le nombre de succès .
N suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4; \frac{7}{30}\right)$ de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{7}{30}$
Calculons la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donnons-en une valeur approchée à 10^{-3}, près.
Pour tout entier $k \in [0; 4]$; on a :

$$p(N = k) = \binom{4}{k} \times \left(\frac{7}{30}\right)^k \times \left(\frac{23}{30}\right)^{4-k}.$$

On veut $p(N = 2) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{7}{30}\right)^2 \times \left(\frac{23}{30}\right)^2 \approx 0192$

$\boxed{p(N = 2) \approx 0,192}$

4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?
Le joueur fait n parties de façon indépendante.

On répète n fois cette expérience de façon indépendante et on considère la variable aléatoire N qui comptabilise le nombre de succès .
N suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{7}{30}\right)$ de paramètre n et $p = \frac{7}{30}$
On veut alors le plus petit entier n qui vérifie $p(N \geqslant 1) \geqslant 0,99$
Or $p(N \geqslant 1) = 1 - p(N = 0) = 1 - \left(\dfrac{23}{30}\right)^n$

$$p(N \geqslant 1) \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{23}{30}\right)^n \leqslant \frac{1}{100}$$

La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$,

$$p(N \geqslant 1) \geqslant 0,99 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{23}{30}\right)^n \leqslant \ln\left(\frac{1}{100}\right) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{23}{30}\right) \leqslant -2\ln 10$$

Comme $\dfrac{23}{30} < 1$, on déduit $\ln\left(\dfrac{23}{30}\right) < 0$, et donc en divisant par $\ln\left(\dfrac{23}{30}\right) < 0$:

$$p(N \geqslant 1) \geqslant 0,99 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{-2\ln 10}{\ln\left(\frac{23}{30}\right)}$$

Enfin $\dfrac{-2\ln 10}{\ln\left(\frac{23}{30}\right)} \approx 17.3$

$\boxed{\text{Le joueur doit faire au moins 18 parties pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à } 0,99.}$

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

   a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $\mathrm{E}(X)$.
   Les valeurs possibles de X sont 4, et 1.
   $p(X = 4) = p(G) = \dfrac{7}{30}$

$p(X=-1)=p(\overline{G})=1-\dfrac{7}{30}=\dfrac{23}{30}$
La loi de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	4	-1
p_i	$\dfrac{7}{30}$	$\dfrac{23}{30}$

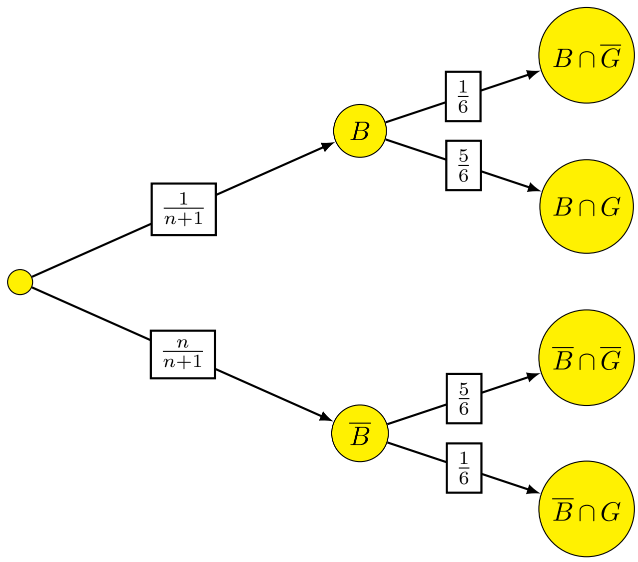
$$E(X)=p_1x_1+p_2x_2=4\times\frac{7}{30}+(-1)\times\frac{23}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

$\boxed{E(X)=\dfrac{1}{6}\approx 0,17€}$

b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E}(X)<0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
$E(X)>0$, donc le jeu est défavorable à l'organisateur

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
Toute trace de recherche, même incomplète, sera évaluée dans cette question

On recommence le jeu de la question mais avec cette fois-ci n jetons noirs dans le sac, ainsi dans le sac il y n jetons noirs et un jeton blanc.
La probabilité de tirer un jeton blanc est $p(B)=\dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\dfrac{1}{n+1}$



$G=(B\cap G)\cup\left(\overline{B}\cap G\right)$.
La formule des probabilités totales donne $p(G)=p\left(B\cap G\right)+p\left(\overline{B}\cap G\right)=p(B)\times p_B(G)+p(\overline{B})\times p_{\overline{B}}(G)$
soit $p(G)=\frac{1}{n+1}\times\frac{5}{6}+\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{6}=\frac{5+n}{6(n+1)}$
$\boxed{p(G)=\frac{n+5}{6n+6}}$ Donnons alors la loi de probabilité de X et son espérance $\mathrm{E}(X)$.
Les valeurs possibles de X sont 4, et 1.
$p(X=4)=p(G)=\frac{n+5}{6n+6}$
$p(X=-1)=p(\overline{G})=1-\frac{n+5}{6n+6}=\frac{5n+1}{6n+6}$
La loi de X est donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	4	-1
p_i	$\frac{n+5}{6n+6}$	$\frac{5n+1}{6n+6}$

$$E(X)=p_1x_1+p_2x_2=4\times\frac{n+5}{6n+6}+(-1)\times\frac{5n+1}{6n+6}=\frac{4(n+5)}{6n+6}-\frac{5n+1}{6n+6}=\frac{-n+19}{6n+6}$$

$\boxed{E(X)=\frac{-n+19}{6n+6}€}$
Le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E}(X)<0$.

$$E(X)<0\Leftrightarrow\frac{-n+19}{6n+6}<0\Leftrightarrow -n+19<0\Leftrightarrow n>19\Leftrightarrow n\geqslant 20$$

$\boxed{\text{donc le jeu est favorable à l'organisateur dès que le sac contient au moins 20 jetons noirs.}}$