Exercice 1

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que

$$\begin{cases} N & \equiv & 5 & (13) \\ N & \equiv & 1 & (17) \end{cases}$$

1 Vérifier que 239 est solution de ce système.
$239 - 5 = 13 \times 18$ donc $239 \equiv 5(13)$; par ailleurs $239 - 1 = 17 \times 14$ donc $239 \equiv 1(17)$.

> On a donc
>
> $$\begin{cases} 239 & \equiv & 5 & (13) \\ 239 & \equiv & 1 & (17) \end{cases}$$

2 Soit N un entier relatif solution de ce système.
Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.
N est solution du système donc N vérifie : $N - 5 = 13y$, avec $y \in \mathbb{Z}$ et $N - 1 = 17x$, avec $x \in \mathbb{Z}$. Par suite $17x - 13y = N - 1 - (N - 5) = 4$ et $N = 1 + 17x = 5 + 13y$.

> Donc si N est solution du système $\begin{cases} N & \equiv & 5 & (13) \\ N & \equiv & 1 & (17) \end{cases}$ alors $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

3 Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.(En donner d'abord une solution évidente)
$17 - 13 = 4$ donc $(1;1)$ est solution de l'équation $17x - 13y = 4$.

- ✍ analyse : Si (x, y) est un couple solution de $17x - 13y = 4$
  alors $17x - 13y = 17 \times 1 - 13 \times 1$
  soit $17(x - 1) = 13(y - 1)$. Alors $17 | 13(y - 1)$.
  Or 13 et 17 sont des nombres premiers, donc sont premiers entre eux.
  Alors, d'après le théorème de Gauss, $17 | y - 1$ donc $y - 1 = 17k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Par suite, $17(x - 1) = 13 \times 17k$ donc $x - 1 = 13k$ (car $17 \neq 0$). D'où $x = 1 + 13k$ et $y = 1 + 17k$ $(k \in \mathbb{Z})$
- ✍ synthèse : Supposons que $x = 1 + 13k$ et $y = 1 + 17k$ $(k \in \mathbb{Z})$.
  Alors $17(x - 1) = 17 \times 13k = 13 \times 17k = 13(y - 1)$.
- ✍ conclusion : $17x - 13y = 4$ équivaut successivement à : $17(x - 1) = 13(y - 1)$, $(k \in \mathbb{Z}.)$.
  Il en résulte que :

L'ensemble des solutions de l'équation $17x - 13y = 4$ est

$$\mathcal{S} = \{(1+13k; 1+17k) | k \in \mathbb{Z}\}$$

4 En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.
D'après 1.b), $N = 1 + 17x = 5 + 13y$, avec $(x; y) \in \mathcal{S}$ donc $x = 1 + 13k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
Donc $N = 1 + 17(1 + 13k) = 18 + 221k$.

Si N est solution de (S) alors $N = 18 + 221k$.

5 Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \quad (221)$ et $\left\{\begin{array}{lll} N & \equiv & 5 \quad (13) \\ N & \equiv & 1 \quad (17) \end{array}\right.$.

✍ Condition nécessaire : Supposons que $N \equiv 18(221)$.
Alors $N - 18 = 221k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $N - 5 = 13 + 13 \times 17k = 13(1 + 17k)$ donc $N \equiv 5(13)$, et $N - 1 = 17 + 17 \times 13k = 17(1 + 13k)$ donc $N \equiv 1(17)$.

✍ Condition suffisante : Supposons que $N \equiv 5(13)$ et $N \equiv 1(17)$.
Alors, d'après 1.d), $N = 18 + 221k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, donc $N - 18 = 221k$ donc $N \equiv 18(221)$.

✍ Conclusion : $N \equiv 18(221) \iff \left\{\begin{array}{lll} N & \equiv & 5 \quad (13) \\ N & \equiv & 1 \quad (17) \end{array}\right.$

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.
Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p.
Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1 Coder la lettre U.

✍ *Étape* 1 : À la lettre U, on associe le nombre 20 dans le tableau.

✍ *Étape* 2 : On calcule le reste de la division euclidienne division euclidienne de $9 \times 20 + 5 = 185$ par 26 ;
$185 = 7 \times 26 + 3$ avec $0 \leq 3 < 26$. Ici $p = 3$.

✍ *Étape* 3 : Au nombre 3, on associe la lettre D dans le tableau.

La lettre U est codée en la lettre D.

2 Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad [26]$.
$9x \equiv 1 \quad [26] \iff$ il existe un entier relatif k tel que $9x = 1 + 26k$

$$9x - 26k = 1$$

Or les entiers 9 et 26 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout nous donne l'existence d'un tel couple (x, k).
Il est clair que $9 \times 3 - 26 \times 1 = 1$.
Donc 3 est un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \quad [26]$ (On a bien $27 \equiv 1 \quad [26]$)

3 Démontrer alors l'équivalence :

$$9m + 5 \equiv p \quad [26] \iff m \equiv 3p - 15 \quad [26].$$

✍ Condition nécessaire :

Si $9m + 5 \equiv p \quad [26]$	alors $9 \times 3m + 5 \times 3 \equiv 3p \quad [26]$	en multipliant par 3 l'inverse de 9 modulo 26
	Soit $m + 15 \equiv 3p \quad [26]$	car $27 \equiv 1 \quad [26]$
	Soit $m \equiv 3p - 15 \quad [26]$	en ajoutant -15

Donc si $9m + 5 \equiv p \quad [26]$ alors $m \equiv 3p - 15 \quad [26]$

✍ Condition suffisante :

Si $m \equiv 3p - 15 \quad [26]$	alors $9 \times m \equiv 9(3p - 15) \quad [26]$	en multipliant par 9 l'inverse de 3 modulo 26
	Soit $9m + 5 \equiv 27p - 135 + 5 \quad [26]$	en ajoutant 5
	Soit $9m + 5 \equiv p - 130 \quad [26]$	car $27 \equiv 1 \quad [26]$
	Soit $9m + 5 \equiv p \quad [26]$	car $130 \equiv 0 \quad [26]$

Donc si $m \equiv 3p - 15 \quad [26]$ alors $9m + 5 \equiv p \quad [26]$

On a donc bien prouvé l'équivalence (par double implication) :

$$9m + 5 \equiv p \quad [26] \iff m \equiv 3p - 15 \quad [26].$$

4 Décoder alors la lettre B.

✍ *Étape* 1 : À la lettre B, on associe le nombre 1 dans le tableau.

✍ *Étape* 2 : On calcule le reste de la division euclidienne division euclidienne de $3p - 15 = 3 \times 1 - 15 = -12$ par 26 ;
$-12 = -1 \times 26 + 14$ avec $0 \leq 14 < 26$. Ici $m = 14$.

✍ *Étape* 3 : Au nombre 14, on associe la lettre 0 dans le tableau.

La lettre B est décodée en la lettre O.

Exercice 2

Commun à tous les candidats

Dans un pays,il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus »
et T l'événement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les événements contraires de V et T.

1 **a.** Précisons valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right)$.
Dans ce pays,il y a 2 % de la population contaminée par un virus, donc

$P(V) = 0.02$

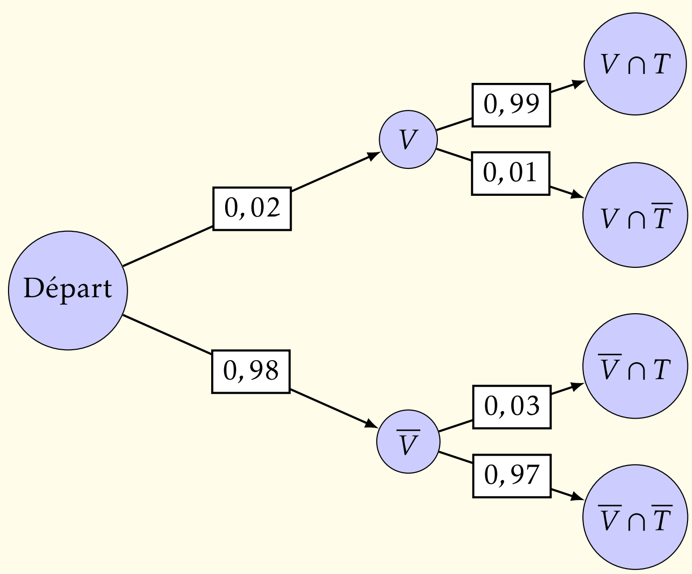
La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 , donc

$P_V(T) = 0.99$

La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 , donc

$P_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) = 0.97$

Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



b. En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.
On a $P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0.02 \times 0.99 = 0.0198$

$P(V \cap T) = 0.198$

2 Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.
D'après la formule des probabilités totales , on a $P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T)$
$P(T) = P(V) \times P(T/V) + P(\overline{V}) \times P(T/\overline{V})$
$P(T) = 0.02 \times 0.99 + 0.98 \times 0.03 = 0.0492$

$P(T) = 0.0492$

3 **a.** Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances »que la personne soit contaminée ».
D'après la définition des probabilités conditionnelles on a :
$P(V/T) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0.0198}{0.0492} = 0.4024 \approx 40\%$

$P(V/T) \approx 40\%$, donc « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances »que la personne soit contaminée »

b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. D'après la définition des probabilités conditionnelles on a :
$P(\overline{V}/\overline{T}) = \dfrac{P(\overline{V} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0.98 \times 0.97}{1 - 0.0492} \approx 0.9998$

$P(\overline{V}/\overline{T}) \approx 0.9998$, donc « Si le test est négatif, il y a environ 99.98 % de « chances »que la personne ne soit pas contaminée »

PARTIE B
On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard,on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées parmi ces 10 personnes.

1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
L'expérience qui consiste à choisir au hasard un individu dans cette population est une épreuve de Bernoulli. On appelle V l'événement « La personne est contaminée ». Alors $P(V) = 0.02$. Les tirages sont indépendantes et ont la même probabilité , donc constituent un schéma de Bernoulli.

X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.02)$.

2 Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.
On veut $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$
Comme X suit $\mathcal{B}(10, 0.02)$, pour tout entier $k \in [0; 10]$, on a $P(X = k) = \binom{10}{k} \times 002^k \times 0.98^{10-k}$
$P(X = 0) = 0.98^{10}$ et $P(X = 1) = 10 \times 0.02 \times 0.98^9$

$P(X \geq 2) = 1 - 0.98^{10} - 10 \times 0.02 \times 0.98^9 \approx 0.0162$

$P(X \geq 2) \approx 0.0162$

Exercice 3

Commun à tous les candidats **5 points**

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

1 Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

En $-\infty$, on écrit $f(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0 \text{ limite de référence} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0\end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

2 On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f = uv$, donc $f' = u'v + v'u$

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (1+x+1)\mathrm{e}^x$$

Pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$

3 Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

On étudie le signe de la dérivée :

la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ a le signe de $(x+2)$:

- ☐ $f'(x) = 0 \iff x = -2$
- ☐ $f'(x) > 0 \iff x+2 > 0 \iff x > -2$

On déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-2) = (-2+1)\mathrm{e}^{-2} = -\mathrm{e}^{-2}$

Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

1 **a.** Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

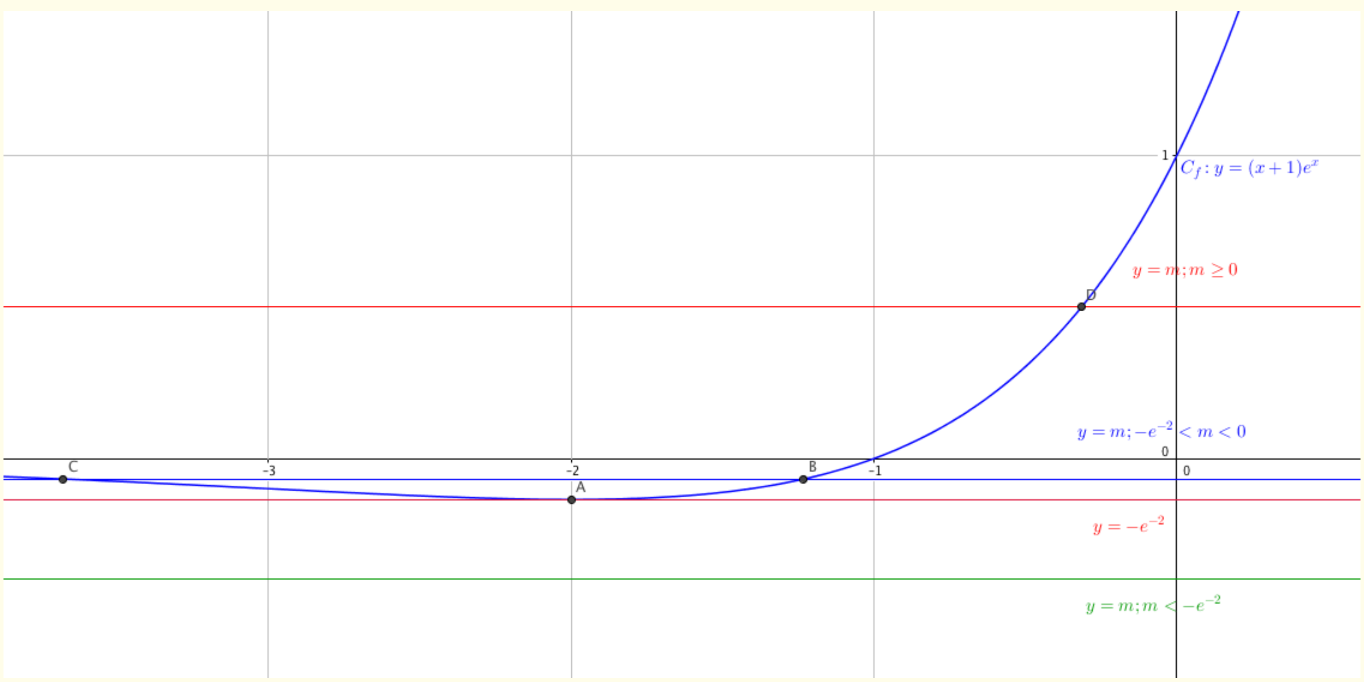
$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x + 1 - m\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ &\iff x + 1 = m\mathrm{e}^{-x} \\ &\iff \frac{x+1}{\mathrm{e}^{-x}} = m \\ &\iff (x+1)\mathrm{e}^{x} = m \\ &\iff f(x) = m \end{aligned}$$

b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

En utilisant le tableau de variation de f, on obtient la discussion suivante :

- ☐ Premier cas : si $m \geq 0$, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution et donc la courbe $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un seul point.
- ☐ Deuxième cas : si $m \in]-\mathrm{e}^{-2}; 0[$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions et donc la courbe $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points.
- ☐ Troisième cas : si $m = -\mathrm{e}^{-2}$, l'équation $f(x) = -\mathrm{e}^{-2}$ a une unique solution $x = -2$ et donc la courbe $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}^{-2}}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse -2.
- ☐ Quatrième cas : si $m \in]-\infty; -\mathrm{e}^{-2}[$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution et donc la courbe $\mathcal{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

Une figure :



2 On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_\mathrm{e}$, et $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).

Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.

- ☐ Pour $m = 0$, on a $g_0(x) = x+1$,c'est une fonction affine qui est représentée par une droite. La courbe 2 est donc $\mathcal{C}_0$.
- ☐ $-\mathrm{e} \in]-\infty; -\mathrm{e}^{-2}[$, donc la courbe $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$ ne coupe pas l'axe des abscisses. C'est donc la courbe 1.
- ☐ $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$ est donc la courbe 3 .

3 Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

On étudie le signe de $g_m(x) - (x+1) = -m\mathrm{e}^{-x}$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de $g_m(x) - (x+1)$ est celui de $-m$.

- ☐ Si $m < 0$ alors $-m > 0$, la courbe $\mathcal{C}_m$ est située au dessus la droite $\mathcal{D}$.
- ☐ Si $m = 0$ alors , la courbe $\mathcal{C}_0$ est confondue la droite $\mathcal{D}$.
- ☐ Si $m > 0$ alors $-m < 0$, la courbe $\mathcal{C}_m$ est située en dessous de la droite $\mathcal{D}$.

4 **a.** On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur l'annexe 2.

b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.

Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}$.

En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente, $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$ est située au dessus de $\mathcal{D}$, qui elle-même est située au dessus de $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$; donc $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$ est située au dessus de $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;a]$; donc comme les fonctions g_{e} et $g_{-\mathrm{e}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et donc :

$$\mathcal{A}(a) = \int_0^a \left(g_{-\mathrm{e}}(x) - g_{\mathrm{e}}(x)\right)\, dx$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(a) &= \int_0^a \left(g_{-\mathrm{e}}(x) - g_{\mathrm{e}}(x)\right)\, dx \\
&= \int_0^a \left(x + 1 + \mathrm{e}\mathrm{e}^{-x} - (x + 1 - \mathrm{e}\mathrm{e}^{-x})\right)\, dx \\
&\int_0^a \left(\mathrm{e}^{1-x} + \mathrm{e}^{1-x}\right)\, dx \\
&\int_0^a 2\mathrm{e}^{1-x}\, dx \\
&= \left[-2\mathrm{e}^{1-x}\right]_2^a \\
&= -2\mathrm{e}^{1-a} + 2\mathrm{e}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(a) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{a\to+\infty} (1-a) = -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Par composée } \lim_{a\to+\infty} -2\mathrm{e}^{1-a} = 0$$

$$\lim_{a\to+\infty} \mathcal{A}(a) = 2\mathrm{e}$$

Exercice 4

Commun à tous les candidats **5 points**

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

- Initialisation : $u_0 = 2$ et $2 > 1$, donc la propriété est vraie au rang 0.
- Hérédité : soit $p \geq 0$, on suppose que $u_p > 1$, on doit prouver que $u_{p+1} > 1$.
  Or

$$\begin{aligned} u_{p+1} - 1 &= \frac{1+3u_p}{3+u_p} - 1 \\ &= \frac{1+3u_p}{3+u_p} - \frac{3+u_p}{3+u_p} \\ &= \frac{1+3u_p-3-u_p}{3+u_p} = \frac{2u_p-2}{3+u_p} = \frac{2(u_p-1)}{3+u_p} \end{aligned}$$

  D'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_p > 1$ donc $u_p - 1 > 0$ puis en multipliant par $2 > 0$ on déduit $2(u_p - 1) > 0$.
  Par ailleurs, on admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.donc $u_p > 0$ puis $u_p + 3 > 0$.

  Le quotient de deux réels strictement positifs étant un réel positif, on a prouvé que $\dfrac{2(u_p-1)}{3+u_p} > 0$.

  Ce qui prouve l'hérédité.
- Le principe de récurrence s'applique : pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n > 1$.

2 **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n \\ &= \frac{1+3u_n}{3+u_n} - \frac{u_n(3+u_n)}{3+u_n} \\ &= \frac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \frac{1-u_n^2}{3+u_n} \\ &= \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n} \end{aligned}$$

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:
Comme on sait que tous les termes de la suite sont strictement positifs, on déduit que $1 + u_n > 0$ et $3 + u_n > 0$.
Par ailleurs comme pour tout entier $n \geq 0$, on a $u_n > 1$, on déduit que $1 - u_n < 0$.
Donc pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite (u_n) est donc décroissante.

En déduire que la suite (u_n) converge.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 ; elle est donc convergente.

Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n :

$$u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}.$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1 On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u	0.8	1.077	0.976

2 Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

La suite (u_n) semble converger vers 1.

3 On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1}{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + 1} = \frac{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - \dfrac{0,5+u_n}{0,5+u_n}}{\dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + \dfrac{0,5+u_n}{0,5+u_n}} = \frac{\dfrac{0,5-0,5u_n}{0,5+u_n}}{\dfrac{1,5+1,5u_n}{0,5+u_n}}$$

$$\frac{0,5-0,5u_n}{0,5+u_n} \times \frac{1,5+1,5u_n}{0,5+u_n} = \frac{-0,5(u_n-1)}{1,5(1+u_n)} = -\frac{0,5}{0,5\times 3}v_n = -\frac{1}{3}v_n$$

Ayant pour tout entier n $v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$; la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.
$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$.
La suite (v_n) étant géométrique, on a $v_n = q^n \times v_0 = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$$v_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

4 **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.
On raisonne par l'absurde, s'il existe un rang n pour lequel $v_n = 1$, alors :
$\frac{u_n - 1}{u_n + 1} = 1 \iff u_n - 1 = u_n + 1$; ce qui est absurde !

b. montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$.

$$\begin{aligned}
v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} &\iff (u_n + 1)v_n = u_n - 1 && \text{en multipliant par } u_n + 1 \neq 0 \\
&\iff u_n v_n + v_n = u_n - 1 \\
&\iff u_n v_n - u_n = -v_n - 1 \\
&\iff u_n(v_n - 1) = -v_n - 1 \\
&\iff u_n = \frac{-v_n - 1}{v_n - 1} = \frac{v_n + 1}{1 - v_n} && \text{en divisant par } v_n - 1 \neq 0
\end{aligned}$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Ayant $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ et donc comme $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$, on déduit à l'aide des théorèmes usuels sur les calculs de limite : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Annexe de l'exercice 3