TS6 2016 Corrigé du Devoir en temps Libre n ° 4 TS6 2016

Pour le 27 novembre 2015

Correction de l'exercice 1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(-x) = \mathrm{e}^{-k(-x)^2} = \mathrm{e}^{-kx^2} = g_k(x)$. Donc g_k est paire.

2. g_k est la composée d'une fonction polynôme ($u : x \mapsto -kx^2$) et d'une fonction exponentielle. Par conséquent, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g_k'(x) &= \left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' \\ &= u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} \\ g_k'(x) &= -2kx\mathrm{e}^{-kx^2} \end{aligned}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^{star}$, $\mathrm{e}^{-kx^2} > 0$ et $-2kx < 0$(Ici k est positif). Ainsi, $g_k'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g_k est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par parité, g_k est donc croissante sur $\mathbb{R}_-$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(-kx^2) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x) = 0$.

De plus, $g_k(0) = \mathrm{e}^{-k\times 0^2} = \mathrm{e}^0 = 1$. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_k'(x)$		$+$	0	$-$	
g_k	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

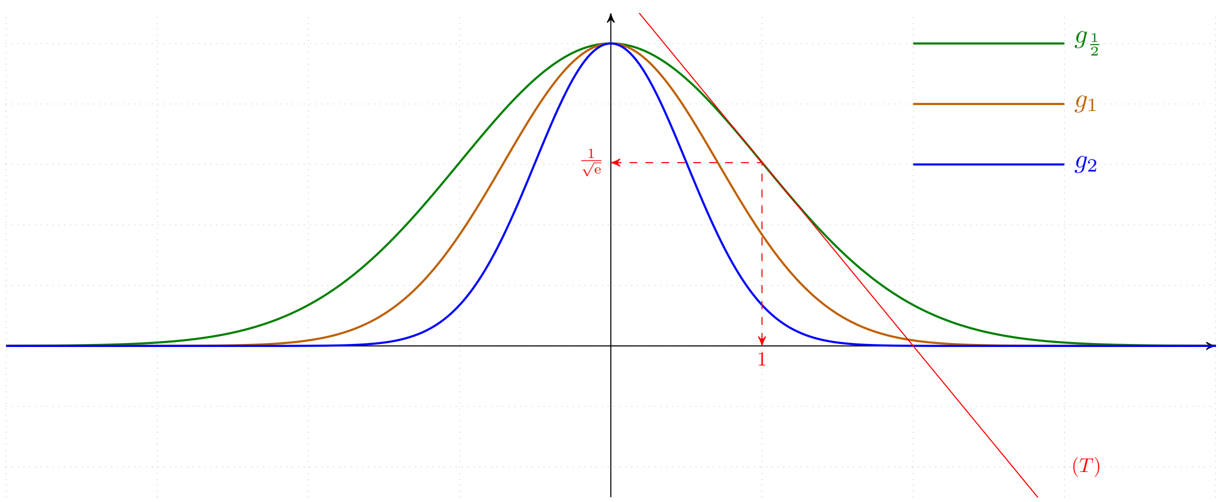
4. $g_k''(x) = -2k\mathrm{e}^{-kx^2} - 2kx\times(-2kx)\mathrm{e}^{-kx^2}$.

$= -2k\mathrm{e}^{-kx^2}(1 - 2kx^2)$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g_k''(x) = 0 &\iff 1 - 2kx^2 = 0 \\ &\iff x^2 = \frac{1}{2k} \qquad \iff x = \frac{1}{\sqrt{2k}} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2k}} (k > 0) \end{aligned}$$

5. Nous avons les courbes suivantes :



6. $h \leqslant k \Leftrightarrow -k \leqslant -h$

$\Leftrightarrow -kx^2 \leqslant -hx^2$ car $x^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-kx^2} \leqslant \mathrm{e}^{-hx^2}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante

$\Leftrightarrow g_k(x) \leqslant g_h(x)$

7. Une équation de la tangente (T) á $\mathcal{C}_{g_{\frac{1}{2}}}$ au point d'abscisse α est :

$$y = g'_{\frac{1}{2}}(\alpha)(x-\alpha) + g_{\frac{1}{2}}(\alpha)$$

$$y = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}(x-1) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}x + \frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}}.$$

Correction de l'exercice 2

1. a. • $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-\mathrm{e}^{-x}) = 2$

Ainsi, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b. $f(x) = 2x - 2 + -x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$ donc $f(x) - (2x-2) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ (cours) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-2)] = 0$,

ce qui signifie que la droite d'équation $y = 2x-2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c. $f(x) - (2x-2) = (1-x)\mathrm{e}^{-x} > 0$ si $1 - x > 0$, soit $x < 1$.

Ainsi, $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ sur $[0\,;1]$ et au-dessous sur $[1\,;+\infty[$.

2. a. f est de la forme uv avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = 2 - \mathrm{e}^{-x}$.

Ainsi, $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

D'oÃź :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \mathrm{e}^{-x} + (x-1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= 2 - \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \\ f'(x) &= x\mathrm{e}^{-x} + 2(1 - \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

b. Si $x > 0$, alors $\mathrm{e}^{-x} > 1$ et $1 - \mathrm{e}^{-x} > 0$.

De plus, $x\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc, par somme de termes positifs, $f'(x) > 0$.

c. $f'(0) = 0$.

De la question précédente, on déduit que f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 3

Partie A

1. Notons u la fonction définie sur $\left]-1\,;+\infty\right[$ par :

$u : x \longmapsto \dfrac{x}{x+1}$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée u' :

$u'(x) = \dfrac{1\cdot(x+1) - x\times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

La fonction d est la composée de la fonction u par la fonction exponentielle. La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction exponentielle permet d'obtenir l'expression de la fonction d' :

$d'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)} = \dfrac{1}{(x+1)^2}\cdot e^{\frac{x}{x+1}}$

La fonction carré et la fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction d' est positive sur $\left]-1\,;+\infty\right[$.

La fonction d est croissante sur l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$.

2. Déterminons les deux limites demandées :

• On a les deux limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-1^+} x+1 = 0^+$; $\lim\limits_{x\to-1^+} x = -1$

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to -1^+} d(x) = \lim_{x \to -1^+} e^{\frac{x}{x+1}} = 0^+$$

- On a la limite suivante :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$$
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$. On en déduit :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} d(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$$

3. Pour tout $x \in \left]-1\,;+\infty\right[$, on a $x+1$ est strictement positif ; on a :
$$x \leqslant x+1$$
$x+1$ est un nombre réel strictement positif :
$$\frac{x}{x+1} \leqslant \frac{x+1}{x+1}$$
$$\frac{x}{x+1} \leqslant 1$$
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit :
$$e^{\frac{x}{x+1}} \leqslant e^1$$
$$e^{\frac{x}{x+1}} \leqslant e$$
$$d(x) \leqslant e$$
Or, l'image de tout nombre réel par la fonction exponentielle étant strictement positif, on en déduit l'encadrement :
$$0 < d(x) < e$$

Partie B

1. a. En utilisant l'expression de d' obtenue à la question 1., on obtient la dérivée f' de la fonction f :
$$f'(x) = 1 + 0 - \frac{1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$$
L'expression de la fonction f' est donnée sous la forme :
$$f'(x) = 1 - u(x) \cdot v(x)$$
où les fonctions u et d sont définies par :
$$u(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad ; \quad d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$$
Déterminons l'expression de f' :
La formule de dérivation de la fonction inverse permet d'obtenir l'expression de u' :
$$u'(x) = -\frac{2\cdot(x+1)}{\left[(x+1)^2\right]^2} = -\frac{2\cdot(x+1)}{(x+1)^4}$$
La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f'' :
$$f''(x) = 0 - \left[u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\right]$$
$$= -\left[-\frac{2\cdot(x+1)}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}\right]$$
$$= \frac{2\cdot(x+1)}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} - \frac{1}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$$
$$= \left[\frac{2\cdot(x+1)}{(x+1)^4} - \frac{1}{(x+1)^4}\right] \cdot e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{2\cdot(x+1)-1}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$$
$$= \frac{2x+2-1}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{2x+1}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$$

b. Les facteurs $(x+1)^4$ et $e^{\frac{x}{x+1}}$ sont positifs ; ainsi, le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $2x+1$; or, voici le signe de ce facteur sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f''(x)$			||	$-$	0	$+$	

On a l'image suivante par la fonction f' :

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2} \cdot e^{\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1}} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot e^{\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{1}{4}} \cdot e^{-1} = 1 - 4 \cdot e^{-1} \simeq -0,47$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variation de f'	1		1
		$1-4e^{-1}$	

2. **a.** • La fonction f' est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$.

Le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de l'intervalle $\left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$:

$\lim\limits_{x\to-1^-} f'(x) = 1 > 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f'(x) = 1 - 4 \cdot e^{-1} < 0$

D'après le théorème de la bijection, on en déduit qu'il existe une seule valeur $\alpha \in \left]-1\,;-\frac{1}{2}\right[$ vérifiant :

$f'(\alpha) = 0$

• De même sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$, f' est strictement croissante et admet en ses bornes les limites :

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f'(x) = 1 - 4 \cdot e^{-1} < 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 1 > 0$

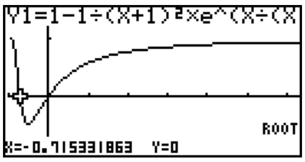
D'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel β appartenant à $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ où s'annule la fonction f'' :

$f'(\beta) = 0.$

Plus précisément, cette valeur est 0 *(*$\beta = 0$*)* :

$f'(0) = 1 - \frac{1}{(0+1)^2} \cdot e^{\frac{0}{0+1}} = 1 - \frac{1}{1} \cdot e^0 = 1 - 1 = 0$

b. L'affichage de la fonction f' à la calculatrice permet d'obtenir une valeur approchée du nombre réel α :



Donc : $\alpha \simeq -0,72$

3. **a.** Sur $]-1\,;+\infty[$, f' s'annule en α et 0 ; étant continue et d'après le tableau de variation obtenu à la question **2.** **b.**, on obtient le tableau de signe suivant :

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En utilisant le signe de la dérivée, on retrouve le sens de variation de la fonction :

- Sur l'intervalle $]-1\,;\alpha]$, la fonction f est strictement croissante ;
- Sur l'intervalle $[\alpha\,;0]$, la fonction f est strictement décroissante ;
- Sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante ;

b. En utilisant les résultats de la partie **A**, on obtient :

- $\lim\limits_{x\to-1^-} x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}} = -1 + 1 - 0 = 0$
- $\lim\limits_{x\to-+\infty} x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}} = +\infty$

c. On a :

$f(0) = 0 + 1 - e^{\frac{0}{0+1}} = 1 - 1 = 0$

On obtient le tableau de variation de la fonction f :

x	-1		α		0		$+\infty$
Variation de f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1. a. $\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = \dfrac{f(x)-0}{x+1} = \dfrac{x+1-e^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}$

$$= 1 - \frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{x+1} = 1 - \frac{x}{x}\cdot\frac{e^{\frac{x}{x+1}}}{x+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\cdot e^{\frac{x}{x+1}}\right)$$

b. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to -1^+} x = -1 \quad ; \quad \lim_{x\to -1^+} x+1 = 0^+$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$$

Or, d'après le cours, on a la limite suivante :

$$\lim_{X\to -\infty} X\cdot e^{X} = 0$$

Par un changement de variable, on en déduit la valeur suivante de la limite :

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1}\cdot e^{\frac{x}{x+1}} = 0$$

c. D'après la question précédente, on a la limite suivante :

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\cdot e^{\frac{x}{x+1}}\right) = -1\times 0 = 0$$

Ainsi, on a la limite suivante :

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1^+} 1 - \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\cdot e^{\frac{x}{x+1}}\right)$$

$$= 1 - 0 = 1$$

Cette limite étant définie, on en déduit que la fonction g est dérivable en -1 et que :

$$g'(-1) = 1$$

2. Voici la représentation graphique demandée :