Nom : .... *Prénom :*	**DS 08** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Devoir n° 8* — *Mars 2024* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1 — *4,5 points*

4.5 pts

On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y' = \frac{y}{4}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1).
2. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t=0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0)=1$.
3. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

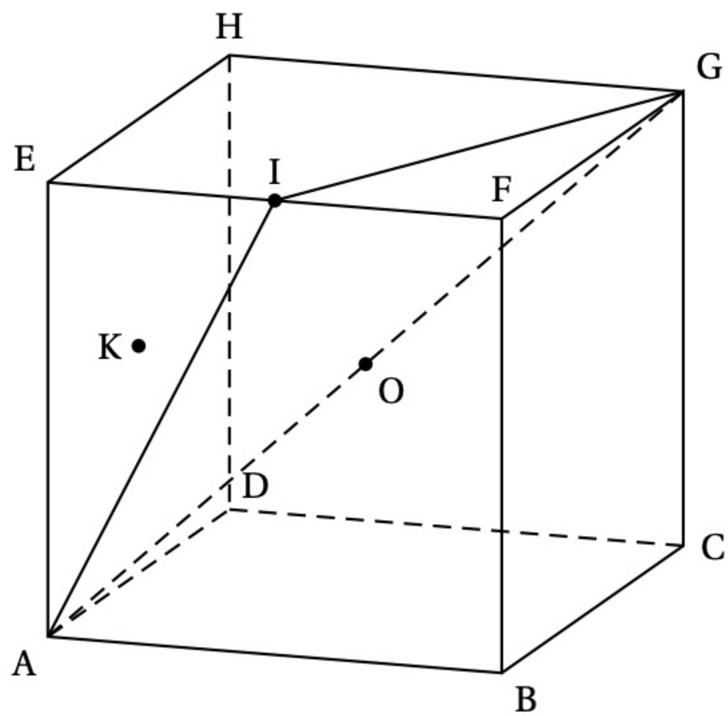
Exercice 2 — *11,5 points*

11.5 pts

1. Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions des fonctions suivantes :
   - **a.** $f_1(x) = -9x^5 + 4x^3 - 2x + 1 \qquad I = \mathbb{R}$.
   - **b.** $f_2(x) = \dfrac{6x+3}{(x^2+x+1)^3} \qquad I = \mathbb{R}$.
   - **c.** $f_3(x) = 7\cos\left(-2x + \dfrac{\pi}{4}\right) \qquad I = \mathbb{R}$.
2. Déterminer la primitive qui vérifie la condition donnée :
   - **a.** $f_4(x) = 5(9x+1)^2 \qquad I = \mathbb{R}$ avec $F_4(0) = 11$.
   - **b.** $f_5(x) = \dfrac{4}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \qquad I =]0;+\infty[$ avec $F_5(2) = 6$.
   - **c.** $f_6(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2+4}} \qquad I = \mathbb{R}$ avec $F_6(4) = 1$

Exercice 3 — *14,75 points*

14.75 pts On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG).

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.

   On admet que les points I et K ont pour coordonnées $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ et $K\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).
5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $L\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.
6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

1. **a.** Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.

   b. En déduire le volume du tétraèdre ABIG.

2. On admet que $AI = IG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $AG = \sqrt{3}$.

   Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).