Nom :	DS 08	TMATHS OISELET	Mars 2024
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 10	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1 — 0 point

On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y' = \frac{y}{4}.$$

1 Résoudre l'équation différentielle (E_1).
L'équation $y' = \dfrac{y}{4}$ s'crit $y' = \dfrac{1}{4}y$. Elle est donc de la forme $y' = ay$ où $a = \dfrac{1}{4}$.

Les solutions de (E_1) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = K\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}$ où K désigne une constante réelle quelconque.

2 Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
On cherche ici la solution de (E_1)vérifiant $g(0) = 1$.

$$\begin{aligned} g(0) = 1 &\iff K\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\times 0} = 1 \\ &\iff K\mathrm{e}^{0} = 1 \\ &\iff K = 1 \end{aligned}$$

La solution cherchée est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}$

3 Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?
On résout ici $g(t) > 3$

$$\begin{aligned} g(t) > 3 &\iff \mathrm{e}^{\frac{1}{4}t} > 3 \\ &\iff \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t}\right) > \ln 3 \\ &\iff \tfrac{1}{4}t > \ln 3 \\ &\iff t > 4\ln 3 \end{aligned}$$

La population dépassera 300 rongeurs pour la première fois à partir de la cinquième année.

Exercice 2 — 0 point

1 Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions des fonctions suivantes :

a. $f_1(x) = -9x^5 + 4x^3 - 2x + 1 \qquad I = \mathbb{R}$.

$$F_1(x) = -9\frac{x^{5+1}}{5+1} + x^4 - x^2 + x + K$$

Les primitives de la fonction f_1 sont les fonctions F_1 définies sur $\mathbb{R}$ par $F_1(x) = -\frac{3}{2}x^6 + x^4 - x^2 + x + K$

b. $f_2(x)=\dfrac{6x+3}{(x^2+x+1)^3}\quad I=\mathbb{R}.$

On peut écrire $f_2(x)=3\times\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}$

On pose $u=x^2+x+1$ alors $u'=2x+1$.

On a alors $f_2=3\times\dfrac{u'}{u^3}=u'u^{-3}$, donc $F_2=3\times\dfrac{u^{-3+1}}{-3+1}=3\times\dfrac{u^{-2}}{-2}=-\frac{3}{2u^2}$

$$\boxed{\text{Les primitives de la fonction } f_2 \text{ sont les fonctions } F_2 \text{ définies sur } \mathbb{R} \text{ par } F_2(x)=-\frac{3}{2\left(x^2+x+1\right)^2}+K}$$

c. $f_3(x)=7\cos\left(-2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\quad I=\mathbb{R}.$

On peut écrire $f_3(x)=-\frac{7}{2}\times(-2)\cos\left(-2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

On pose $u=-2x+\dfrac{\pi}{4}$ alors $u'=-2$.

On a alors $f_3=-\frac{7}{2}\times u'\cos u$, donc $F_3=-\dfrac{7}{2}\sin u$

$$\boxed{\text{Les primitives de la fonction } f_3 \text{ sont les fonctions } F_3 \text{ définies sur } \mathbb{R} \text{ par } F_3(x)=-\frac{7}{2}\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)+K}$$

2 Déterminer la primitive qui vérifie la condition donnée :

a. $f_4(x)=5(9x+1)^2\quad I=\mathbb{R}$ avec $F_4(0)=11$

On peut écrire $f_4(x)=\dfrac{5}{9}\times 9(9x+1)^2$

On pose $u=9x+1$ alors $u'=9$.

On a alors $f=\dfrac{5}{9}\times u'u^2$, donc $F=\dfrac{5}{9}\times\frac{u^{2+1}}{2+1}=\dfrac{5}{9}\times\frac{u^3}{3}=\dfrac{5}{27}u^3$

Une primitive de la fonction f_4 est la fonction F_4 définie sur GR par $F_4(x)=\dfrac{5}{27}(9x+1)^3+K$

$$\begin{aligned}F_4(0)=11 &\iff \frac{5}{27}(9\times 0+1)^3+K=11\\ &\iff \frac{5}{27}+K=11\\ &\iff K=11-\frac{5}{27}=\frac{11\times 27-5}{27}=\frac{292}{27}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La primitive } F_4 \text{ de } f_4 \text{ qui vérifie } F_4(0)=11 \text{ est définie par } F_4(x)=\frac{5}{27}(9x+1)^3+\frac{292}{27}.}$$

.

b. $f_5(x)=\dfrac{4}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\quad I=]0;+\infty[$ avec $F_5(2)=6$

On peut écrire $f_5(x)=-4\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\times\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

On pose $u=\frac{1}{x}$ alors $u'=-\frac{1}{x^2}$.

On a alors $f_5=-4\times u'e^u$, donc $F_5=-4e^u$

Une primitive de la fonction f_5 est la fonction F_5 définie sur $I=]0;+\infty[$ par $F_5(x)=-4\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+K$

$$\begin{aligned}F_5(2)=6 &\iff -4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}+K=6\\ &\iff K=6+4\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\\ &\iff K=6+4\sqrt{e}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La primitive } F_5 \text{ de } f_5 \text{ qui vérifie } F_5(2)=6 \text{ est définie sur } I=]0;+\infty[\text{ par } F_5(x)=-4\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+6+4\sqrt{e}.}$$

.

c. $f_6(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2+4}}$ $\quad I = \mathbb{R}$ avec $F_6(4) = 1$

On peut écrire $f_6(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

On pose $u = x^2 + 4$ alors $u' = 2x$.

On a alors $f_6 = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, donc $F_6 = -\dfrac{3}{2} \times 2\sqrt{u} = -3\sqrt{u}$

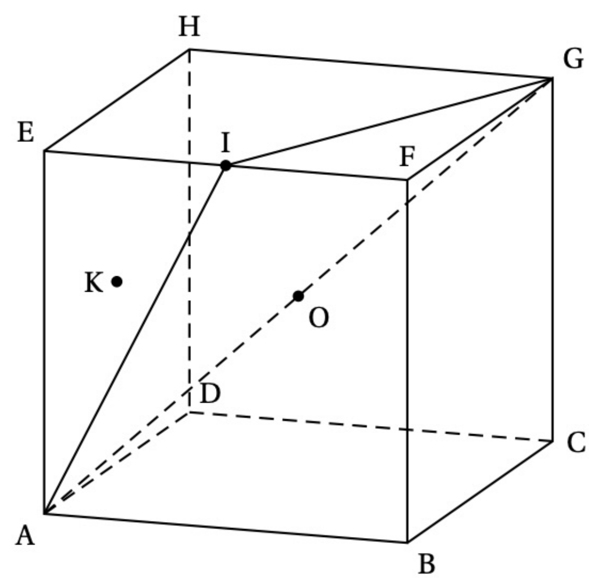
Une primitive de la fonction f_6 est la fonction F_6 définie sur $\mathbb{R}$ par $F_6(x) = -3\sqrt{x^2+4} + K$

$$\begin{aligned} F_6(4) = 1 \quad & \iff -3\sqrt{4^2+4} + K = 1 \\ & \iff -3\sqrt{20} + K = 1 \\ & \iff K = 1 + 3\sqrt{20} = 1 + 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

La primitive F_6 de f_6 qui vérifie $F_6(4) = 1$ est définie par $F_6(x) = -3\sqrt{x^2+4} + 1 + 6\sqrt{5}$.

Exercice 3 — 0 point

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A~;~\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG).

Partie 1. Première méthode

1 Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.

On a les coordonnées suivantes : A (0 ; 0 ; 0) (origine du repère), B (1 ; 0 ; 0) et G (1 ; 1 ; 1).

On admet que les points I et K ont pour coordonnées $I\left(\dfrac{1}{2}~;~0~;~1\right)$ et $K\left(0~;~\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{1}{2}\right)$.

2 Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

Les points A, I et G ne sont pas alignés, donc $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont deux vecteurs formant une base de (AIG).

On a les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0,5\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$.

Le repère est orthonormé (car ABCDEFGH est un cube d'arête 1), donc on calcule les produits scalaires avec les coordonnées :

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI} = -1\times 0,5 + 0,5\times 0 + 0,5\times 1 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG} = -1\times 1 + 0,5\times 1 + 0,5\times 1 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont orthogonaux.

> $\overrightarrow{BK}$ étant orthogonal à deux vecteurs formant une base de (AIG), on en déduit que la droite (BK) est bien orthogonale à (AIG).

3 Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.

Puisque (BK) est orthogonale à (AIG), alors un vecteur directeur de (BK) est un vecteur normal à (AIG), notamment, $\vec{n} = -2\overrightarrow{BK}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à (AIG). Ce plan a donc une équation de la forme : $2x - y - z + d = 0$.

Comme A $(0\ ;\ 0\ ;\ 0) \in$(AIG), on en déduit que d est tel que :

$$\begin{aligned}2x_A - y_A - z_A + d = 0 &\iff 2\times 0 - 0 - 0 + d = 0\\ &\iff d = 0\end{aligned}$$

> Finalement, une équation du plan (AIG) est donc bien $2x - y - z = 0$.

4 Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).

La droite (BK) est dirigée par $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\0,5\\0,5\end{pmatrix}$ et passe par B $(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, donc elle admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x = 1 - t\\ y = 0 + 0,5t\\ z = 0 + 0,5t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R} \iff \begin{cases}x &= & 1-t\\ y &= & 0,5t\\ z &= & 0,5t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}.$

> La droite (BK) admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x &= & 1-t\\ y &= & 0,5t\\ z &= & 0,5t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}.$

5 En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $L\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

Le point L dont on donne les coordonnées est clairement le point de paramètre $\frac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique établie à la question précédente, donc L $\in$ (BK).

Vérifions si L est un point du plan (AIG) : $2x_L - y_L - z_L = 2\times\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

Les coordonnées de L vérifient l'équation du plan : L $\in$ (AIG).

L est donc le point d'intersection de la droite (BK) et du plan (AIG) (qui sont sécants, puisque perpendiculaires), et donc L est le projeté orthogonal de B sur le plan (AIG).

6 Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

La distance de B à (AIG) est donc la distance BL, et comme le repère est orthonormé :

$$\begin{aligned}BL &= \sqrt{(x_L - x_B)^2 + (y_L - y_B)^2 + (z_L - z_B)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+1+1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La distance de B à (AIG) est donc la distance } BL = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times b \times h$*, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.*

1 **a.** Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.
Dans le tétraèdre ABIG, si on considère AIB comme base, alors cette base est incluse dans le plan (AIB), qui contient la face avant du cube (la face ABFE), et donc l'arête [GF] est bien perpendiculaire à ce plan, puisque ABCDEFGH est un cube.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABIG.
Le tétraèdre ABIG a donc pour volume $V_{\text{ABIG}} = \frac{1}{3} \times b_{\text{ABI}} \times h_{\text{GF}} = \frac{1}{3} \times \frac{1 \times 1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$.

2 On admet que $\text{AI} = \text{IG} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $\text{AG} = \sqrt{3}$.

(Le triangle ABI a une base [AB] de longueur 1 et la hauteur correspondante, issue de I est de même longueur que [AE], donc de longueur 1 aussi).

Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.
Dans le triangle isocèle AIG, la hauteur principale issue de I est donc aussi une médiane, et elle passe donc par le milieu de la base principale [AG], c'est à dire par le point O.

On détermine la distance IO : $\text{IO} = \sqrt{0^2 + 0,5^2 + (-0,5)^2} = \sqrt{0,5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'aire du triangle est donc $A_{\text{AIG}} = \frac{\text{AG} \times \text{OI}}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

3 En déduire la distance du point B au plan (AIG).
Le tétraèdre AIBG dont on a déjà calculé le volume peut aussi être vu comme ayant pour base le triangle AGI et comme hauteur correspondante, la hauteur issue de B, donc la longueur h est la distance séparant B du plan (AGI).

On a donc :
$$\begin{aligned} V_{\text{ABIG}} = \frac{1}{6} &\iff \frac{1}{3} \times A_{\text{AIG}} \times h = \frac{1}{6} \\ &\iff h = \frac{3}{A_{\text{AIG}} \times 6} \\ &\iff h = \frac{1}{2A_{\text{AIG}}} \\ &\iff h = \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{4}} \\ &\iff h = \frac{2}{\sqrt{6}} \\ &\iff h = \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ &\iff h = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

On retrouve bien lae distance de B au plan (AIG) qui est $\frac{\sqrt{6}}{3}$.