Nom : .... *Prénom :*	**DS 04** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Déc. 2023* *Devoir n° 08* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 11 points

11 pts

Soit la fonction f est définie sur $[0\ ;\ 11]$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ 11]$ et construire son tableau de variations.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution α sur l'intervalle$[0\ ;\ 11]$.
3. Donner l'arrondi de α à l'unité.

Exercice 2 Vrai-Faux — 6 points

6 pts

L'espace est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(-3\,;-2\,;-1\,)$, $B(-2\,;0\,;1\,)$ et $C(7\,;3\,;6\,)$

On donne des représentations paramétriques des droites d : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = 2t+1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et d' : $\begin{cases} x = t'+1 \\ y = t'-3 \\ z = t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

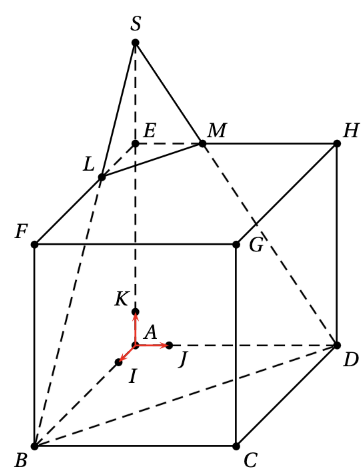
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Les droites d et (AB) sont confondues.
2. Les droites d et (BC) sont sécantes.

Exercice 3 — 11 points

11 pts

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de **6 mètres d'arête**.
Ces deux solides sont représentés par le cube $ABCDEFGH$ et par le tétraèdre $SELM$ ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.
Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

Partie A

Dans cette partie, on n'utilisera pas les coordonnées.

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.
   On admet que les droites (LM) et (FH) sont parallèles.
2. En déduire que dans le plan $(EFGH)$ le triangle ELM est isocèle.

Partie B

1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B, C, D, E, G, H.
2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et que les coordonnées du point M sont $(0\ ;2\ ;6\ )$.
3. Donner une représentation paramétrique dechacune des droites (BL) et (DM).
4. En déduire les coordonnées du point S .

Exercice 4 — 12 points

12 pts

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3.$$

4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

   c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B Bonus : 4 points

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f(v_n).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, $\mathcal{C}_f$, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
   Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.
   Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n).$$

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3 La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

Annexe