Nom :	DS 03	TMATHS OISELET	Nov. 2023
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir n° 06	.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 2CM — *5 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 3 qui sera ramassé 20 minutes apès le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

1 pt **1** La quantité $3^n + 2 \times 3^n$ est égal à :

a. $3^n(3^n+2)$ **b.** $3^n + 5^n$ **c.** 3^{n+1}

$$\begin{aligned} 3^n + 2\times 3^n &= 3^n + 2 \times 3^{\times}1 \\ &= 3^n \times (2+1) \\ &= 3 \times 3^n \\ &= 3^{n+1} \end{aligned}$$

La bonne réponse est **c.**

1 pt **2** Si la suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$:

a. $u_1 = 5$ **b.** $u_2 = 200$ **c.** La suite (u_n) est croissante.

On a $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n$, d'où on déduit $u_{n+1} - u_n = 2u_n^2$..
Ainsi pour tout entier naturel n :$u_n^2 \geq 0$ car le carré d'un réel est toujours positif.
En multipliant par $2 > 0$, on a pour tout entier naturel n :$u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

La bonne réponse est **c.**

1 pt **3** Si la suite (u_n) est géométrique alors on peut avoir :

a. $u_n = (n+1)^2$ **b.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)u_n \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$

Si la suite (u_n) est géométrique alors pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = qu_n$, où q désigne une constante. Or dans le **c.** , on a $u_{n+1} = -u_n = -1 \times u_n$

La bonne réponse est **c.**

1 pt **4** Si la suite (u_n) est arithmétique alors on peut avoir :

a. $u_n = n^2 + 3$ **b.** $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$ **c.** $u_n = \dfrac{3}{4}n - 3$

Si la suite (u_n) est arithmétique alors pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = r$ où r désigne une constante. Or dans le **c.** , on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{4}(n+1) - 3 - \left(\frac{3}{4}n - 3\right) \\ &= \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} - 3 - \frac{3}{4}n + 3 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

La bonne réponse est **c.**

1 pt **5** La limite quand $n \to +\infty$ de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1-4n}{n}$ est :

a. -1 **b.** -4 **c.** $+\infty$

$$\begin{aligned} \frac{1-4n}{n} &= \frac{n\left(\frac{1}{n} - 4\right)}{n} \\ &= \frac{1}{n} - 4 \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 4 = -4$

La bonne réponse est **b.**

Exercice 2 *10 points*

10 pts **On rédigera en détail, la détermination de chaque limite.**

1 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $u_n = 2n^2 + 3n + 5$.

$$\begin{aligned} u_n &= 2n^2 + 3n + 5 \\ &= n^2\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ on a :

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} (n^2) = +\infty \\ &\lim_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 2 \end{aligned}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

2 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $v_n = \dfrac{n+2}{n^2+1}$.

$$
\begin{aligned}
v_n &= \frac{n+2}{n^2+1} \\
&= \frac{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}
\end{aligned}
$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$$

3 Calculer la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite de terme général $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \left(-n^2 - n + 1\right)$.

$$
\begin{aligned}
w_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \times \left(-n^2 - n + 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \times n^2 \times \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{n^2}{\sqrt{n}} \times \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= n\sqrt{n} \times \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \text{ car } \frac{n^2}{\sqrt{n}} = \frac{n \times \sqrt{n}^2}{\sqrt{n}} = n\sqrt{n}
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n} = +\infty \\ &\lim_{n\to+\infty} \left(-1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -1 \end{aligned}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty}$$

4 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3e^n + 6}{2e^n + 7}$

Posons $x_n = \frac{-3e^n + 6}{2e^n + 7}$

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{-3e^n + 6}{2e^n + 7} \\
&= \frac{e^n\left(-3 - \dfrac{6}{e^n}\right)}{e^n\left(2 + \dfrac{7}{e^n}\right)} \\
&= \frac{-3 - 6e^{-n}}{2 + 7e^{-n}}
\end{aligned}
$$

On remarque alors : $e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ avec $\frac{1}{e} \approx 0,37$.

On utilise alors le résultat suivant :

Propriété 1

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Comme $-1 < \dfrac{1}{e} < 1$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} == 0$;

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = -\frac{3}{2}}$$

5 Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{n} + 2 \right)$

On utise ici le théorème des gendarmes :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad & -1 \leq (-1)^n \leq 1 \\ & -\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \text{ en divisant par } n > 0 \\ & -\frac{1}{n} + 2 \leq \frac{(-1)^n}{n} + 2 \leq \frac{1}{n} + 2 \text{ en ajoutant } 2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{1}{n} + 2 = 2 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} + 2 = 2 \end{array} \right\} \quad \text{le théorème des gendarmes s'applique } \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} + 2 = 2$$

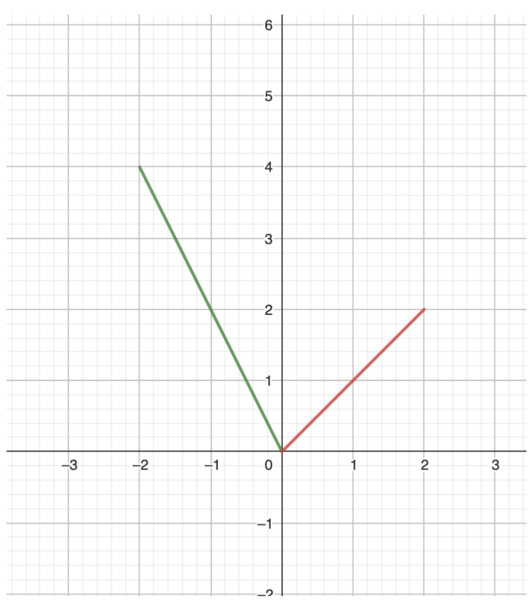
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} + 2 = 2}$$

Exercice 3 — 3 points

3 pts

1 Construire la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x \text{ si } x \in [-2; 0[\\ x \text{ si } x \in [0; 2] \end{cases}$$



2 La fonction f est-elle continue sur $[-2,2]$. Justifier.

- Déjà f est continue sur chacun des des intervalles $[-2;0[$ et $]0;2]$ car c'est un polynôme sur chacun de ces intervalles.
- Il reste à étudier la continuité en 0 $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2x = 0\end{array}\right\}$ comme $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

  f est donc continue en 0.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [-2,2].}$$

Exercice 4 — 8 points

8 pts f est la fonction définie sur l'intervalle $[-4;4]$ par $f(x) = x^3 - 27x + 4$

1 Montrer que pour tout réel x de $[-4;4]$, on a $f'(x) = 3(x-3)(x+3)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 27 \\ &= 3(x^2 - 9) \\ &= 3(x^2 - 3^2) \\ &= 3(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{on a bien } f'(x) = 3(x-3)(x+3)}$$

2 Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4;4]$.
La dérivée est un trinôme du second degré qui a pour racines -3 et 3. Ainsi la dérivée a lae signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur. On déduit le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4;4]$:

x	-4		-3		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	48	$\nearrow$	58	$\searrow$	-50	$\nearrow$	-40

3 Démontrer qe l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur l'intervalle $[-4;4]$.

- Sur l'intervalle $[-4;-3]$:
  f est strictement croissante, donc si $-4 \leq x \leq -3$ alors $f(-4) \leq f(x) \leq f(-3)$ ce qui fournit $f(x) \geq 48 > 0$.
  Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[-4;-3]$.
- Sur l'intervalle $[-3;3]$:

  D'après le théorème de la bijection :

  ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = [-3;3]$.

  ✍ f est strictement décroissante sur l' intervalle $I = [-3;3]$.

  ✍ $f(-3) = 58$ et $f(-3) = -50$

  ✍ f réalise donc une bijection de $[-3;3]$ sur $[-50;.58]$
  0 est compris entre $f(-3)$ et $f(3)$, en effet $f(-3) > 0$ et $f(-3) < 0$
  donc l'équation $f(x) = 0$ a une racine unique α dans $[-3;3]$.
- Sur l'intervalle $[3;4]$:
  f est strictement croissante, donc si $3 \leq x \leq 4$ alors $f(3) \leq f(x) \leq f(4)$ ce qui fournit $f(x) \leq -40 < 0$.
  Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[3;4]$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur l'intervalle $[-4;4]$.

4 Avec la calculatrice donner un arrondi au centième de α.
Grâce à une calculatrice, on obtient :

- $f(0,14) \approx 0,22$
- $f(0,15) \approx -0,05$

On déduit donc $f0,15) < 0 < f(0,14)$
Soit $f0,15) < f(\alpha) < f(0,14)$
Ainsi puisque f est strictement décroissantez sur $[-3;3]$:

$$0,14 < \alpha < 0,15$$

0,14 est un arrondi au centième de α par défaut.

5 En déduire le signe de $f(x)$.
Le signe se déduit du tableau de variation de f :

x	-4		-3		α		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	58	↘				↗	-40
	48		0				-50		
Signe de $f(x)$		$+$		$+$	0	-		-	

Exercice 5 Limite et comparaison — 3 points

3 pts Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = 1 + \dfrac{\cos(n)}{e^n}$

1 Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $1 - e^{-n} \leq u_n \leq 1 + e^{-n}$
On utise ici le théorème des gendarmes :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad & -1 \leq \cos(n) \leq 1 \\ & -\frac{1}{e^n} \leq \frac{\cos(n)}{e^n} \leq \frac{1}{e^n} \text{ en divisant par } e^n > 0 \\ & 1 - \frac{1}{e^n} \leq 1 + \frac{\cos(n)}{e^n} \leq 1 + \frac{1}{e^n} \text{ en ajoutant } 1 \\ & 1 - e^{-n} \leq u_n \leq 1 + e^{-n} \text{ car } \frac{1}{e^n} = e^{-n}\end{aligned}$$

2 En déduire la limite de la suite (u_n).

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} -1 - e^{-n} = 1 \\ \lim_{n\to+\infty} 1 + e^{-n} = 1\end{aligned}\right\} \quad \text{le théorème des gendarmes s'applique } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

On utilise le résultat obtenu à l'exercice 2, à savoir : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

Exercice 6 — 12 points

12 pts On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1 Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

- $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,500 + 200 = 9\,700$.
- $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9700 + 200 = 9\,215 + 200 = 9\,415$.

$\boxed{u_1 = 9\,700 \text{ et on a bien } u_2 = 9\,415.}$

2 **a.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $u_n > 4\,000$ ».

✍ ***Initialisation :***
$u_0 = 10\,000$ et $10\,000 > 4\,000$
Donc la propriété est vraie au rang 0.

✍ ***Hérédité :*** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $u_k > 4\,000$.(HR)
On veut prouver que $u_{k+1} > 4\,000$

$$\begin{array}{lll} u_{k+1} & = 0,95u_k + 200 & \\ & u_k > 4\,000 & \text{d'après (HR)} \\ & 0,95u_k > 0,95 \times 4\,000 & \text{en multipliant par } 0,95 > 0 \\ & 0,95u_k + 200 > 0,95 \times 4\,000 + 200 & \text{en ajoutant } 200 \\ & u_{k+1} > 400 & \text{car } 0,95 \times 4\,000 + 200 = 4\,000 \end{array}$$

✍ ***Conclusion :*** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a « $u_n > 4\,000$ ».

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
Méthode : On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:
Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,95u_n + 200 - u_n \\ &= (0,95 - 1)u_n + 200 \\ &= -0,05u_n + 200 \\ &= -0,05(u_n - 4\,000) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} -0,05 < 0 \\ (u_n - 4\,000) > 0 \text{ car } u_n > 4\,000 \end{array}\right\}, \text{ par produit on a } -0,05(u_n - 4\,000) < 0$$

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } u_{n+1} - u_n < 0, \text{ ce qui prouve que la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par $4\,000$.
D'après le théorème de la convergence monotone, toute suite décroissante minorée est convergente,

$\boxed{\text{ainsi la suite } (u_n) \text{ est convergente.}}$

3 Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Calculer v_0.
Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4\,000 = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000$.

$$\boxed{v_0 = 6\,000}$$

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$. Au choix :
Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,000 = 0,95u_n + 200 - 4\,000 = 0,95u_n - 3\,800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3\,800}{0,95}\right) = 0,95\,(u_n - 4\,000) = 0,95v_n$.
L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.
Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4\,000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.
On peut donc calculer : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 4\,000}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95u_n + 200 - 4\,000}{u_n - 4\,000} =$
$\dfrac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95\left(u_n - \frac{3\,800}{0,95}\right)}{u_n - 4\,000} = \dfrac{0,95\,(u_n - 4\,000)}{u_n - 4\,000} = 0,95$.
Cette égalité vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

D'après le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6\,000 \times 0,95^n$.
Or $v_n = u_n - 4\,000 \iff u_n = v_n + 4\,000 = 6\,000 \times 0,95^n + 4\,000$.

d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.
Comme $-1 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 6\,000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4\,000$ (par somme de limites).

4 En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.
u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

Exercice 7 Bonus — *3 points*

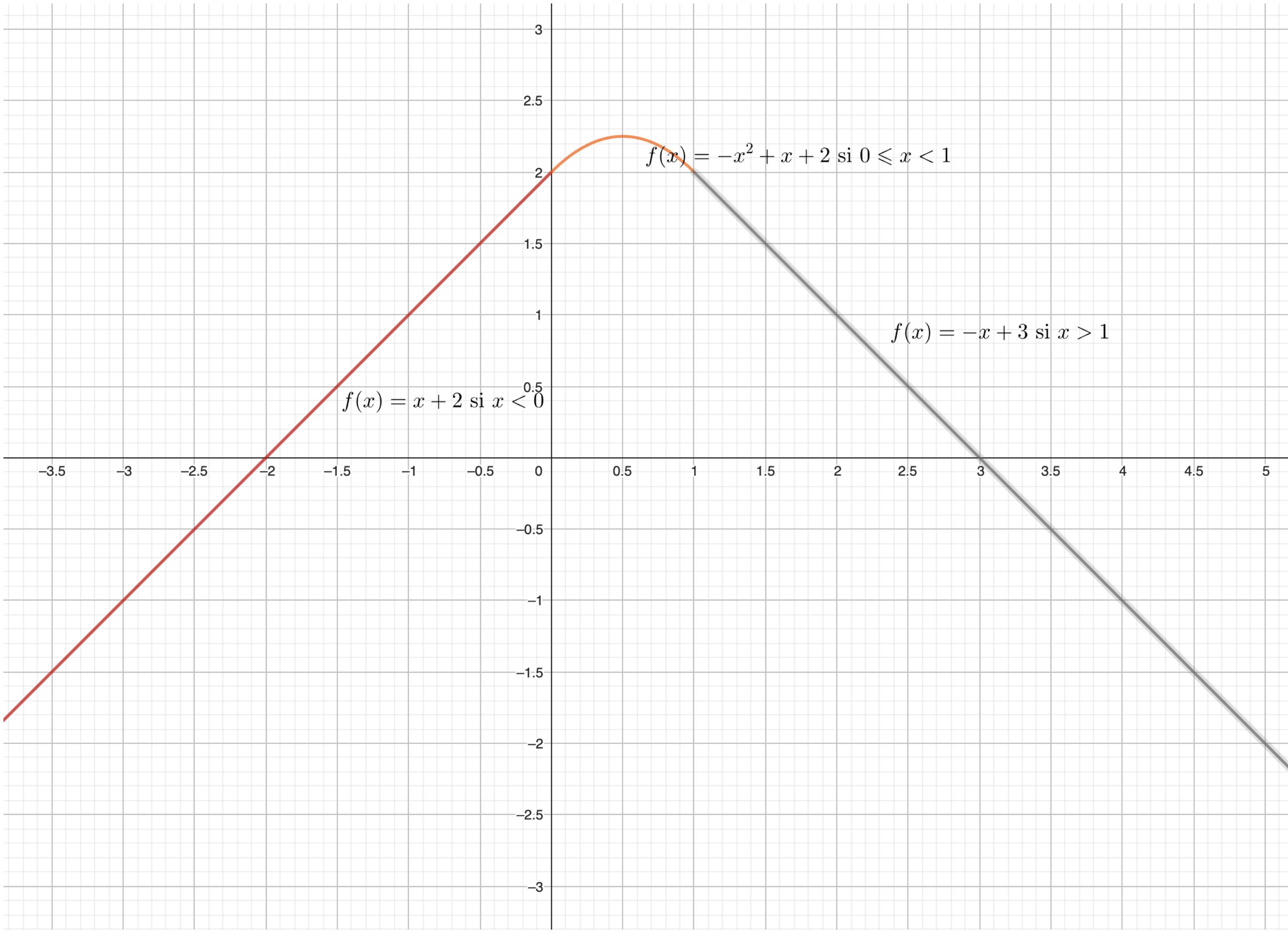
3 pts Trouver une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f(x) = x + 2$ si $x < 0$
- f est un polynôme du second degré pour x entre 0 et 1.
- f est affine de pente négative pour $x > 1$.

On pourra vérifier que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ si } x < 0 \\ -x^2 + x + 2 \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ -x + 3 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

convient !



Nom : .... *Prénom :*	**DS 03** CASE DES MATHS	TMATHS OISELET *Devoir n° 06*	*Nov. 2023* .../...

Feuille de réponses de l'exercice 1 :

✄ ✄

A rendre au bout de 20 minutes.
Nom , prénom :
Groupe :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Réponse	**c.**	**c.**	**c.**	**c.**	**b.**