Nom :	DS 02	TMATHS OISELET — Oct. 2023
Prénom :	CASE DES MATHS	Devoir nº 04 — .../...

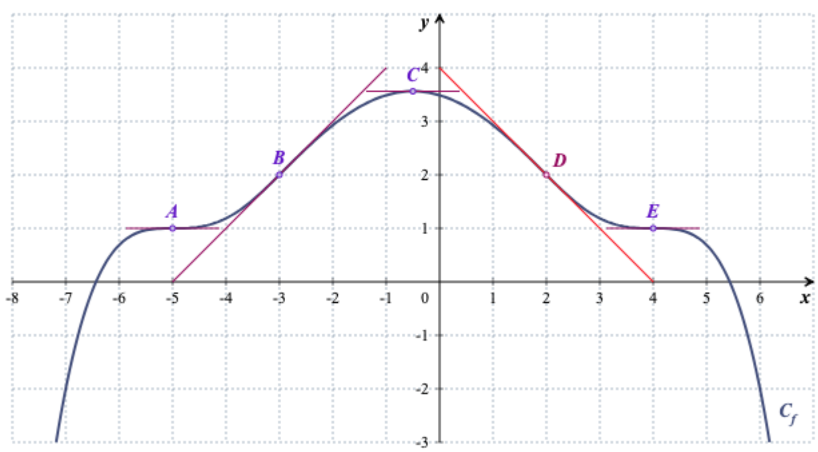
*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises**.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 6 points

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- L'abscisse du point C est égale à $(-0,5)$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $B(-3;2)$ passe par le point de coordonnées $(-5;0)$.
- La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D a pour équation $y=-x+4$.



On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

1 pt **1** **a.** Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D.
La droite d'équation $y=-x+4$ passe par les points de coordonnées $(0;4)$ et $(4;0)$.

1 pt **b.** Déterminer $f'(2)$.
Le nombre dérivé $f'(2)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D d'où

$$\boxed{f'(2)=-1}$$

Les réponses aux questions suivantes seront justifiées à partir d'arguments graphiques.

0.5 pt **2** Déterminer $f'(-3)$ et $f'(4)$.

✍ Le nombre dérivé $f'(-3)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse -3 d'où

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \frac{0-2}{-5-(-3)} \\ &= \frac{-2}{-2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(-3)=1}$$

✍ La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E d'abscisse 4 est parallèle à l'axe des abscisses d'où

$$\boxed{f'(4) = 0}$$

1 pt **3** Déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $\leqslant$, $=$ ou $\geqslant$ est approprié :

$f'(-5)\cdots 0$ $\quad$ $f'(-7)\cdots f'(6)$ $\quad$ $f''(-1)\cdots f''(3)$ $\quad$ $f''(2)\cdots 0$

✍ La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E d'abscisse -5 est parallèle à l'axe des abscisses d'où

$$\boxed{f'(-5) = 0}$$

✍
- Sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ la fonction f est croissante d'où $f'(x) \geq 0$ sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$, ainsi $f'(-7) \geq 0$.
- Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ la fonction f est décroissante d'où $f'(x) \leq 0$ sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$, ainsi $f'(6) \leq 0$
- On a donc

$$\boxed{f'(6) \leq f'(-7)}$$

✍
- Sur l'intervalle $\left[-3;-\frac{1}{2}\right]$ la fonction f est concave d'où $f''(-1) \leq 0$
- et, sur l'intervalle $[2;4]$ la fonction f est convexe d'où $f''(3) \geq 0$.
- $\boxed{f''(-1) \leq f''(3)}$

✍ La courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente au point D d'abscisse 2 donc D est un point d'inflexion de la courbe d'où

$$\boxed{f''(2) = 0}$$

1 pt **4** Quels sont les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$?
La courbe $\mathcal{C}_f$ traverse ses tangentes aux points A, B, D et E donc :

> la courbe $\mathcal{C}_f$ admet les quatre points A, B, D et E comme points d'inflexion.

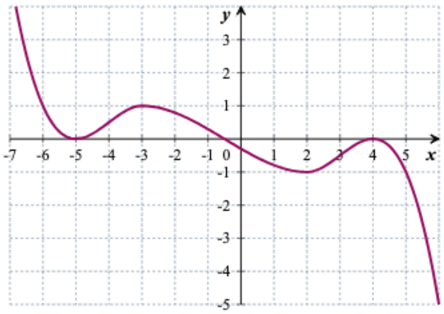
1.5 pt **5** Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.
Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f''.

✍
- Sur l'intervalle $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ la fonction f est croissante d'où $f'(x) \geq 0$ sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.
- Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ la fonction f est décroissante d'où $f'(x) \leq 0$ sur $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

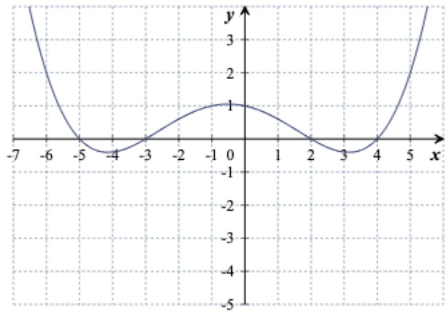
> Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_1$ est la seule des quatre courbes susceptible de représenter la fonction dérivée f'.

✍ Sur l'intervalle $[-3;2]$ la fonction f est concave d'où pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-3;2]$ on a $f''(x) \leq 0$.

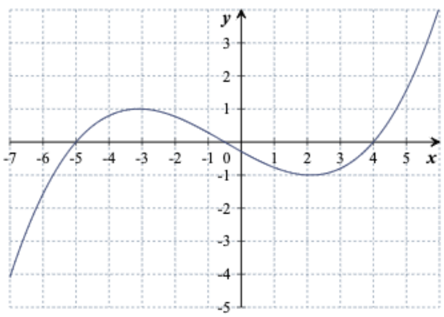
> Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_4$ est la seule des quatre courbes susceptible de représenter la fonction dérivée seconde f''.



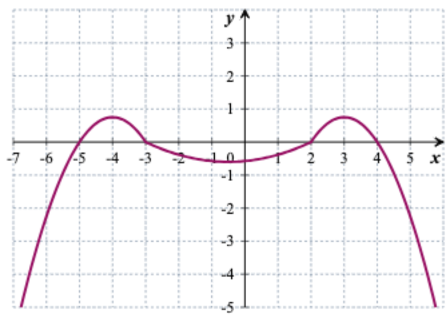
Courbe $\mathscr{C}_1$
représentative de la fonction f'



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$



Courbe $\mathscr{C}_4$
représentative de la fonction f''

Exercice 2 — 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et C_f sa courbe représentative.

1.5 pt **1** Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que pour tout réel x, $f''(x) = 20x^2(x-3)$.

- ✍ f est un polynôme, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est un polynôme est donc à nouveau dérivable sur $\mathbb{R}$. ainsi f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- ✍ $f(x) = x^5 - 5x^4$ donc $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$
- ✍ Comme $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$, on déduit $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$

$$\boxed{f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)}$$

1.5 pt **2** Dresser en justifiant le tableau de signes de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

- Le carré d'un réel étant toujours positif, pour tout x réel on a $x^2 \geq 0$, puis en multipliant par $20 > 0$, on a $20x^2 \geq 0$
- Signe de $x - 3$:
  $x - 3 > 0 \iff x > 3$
- Tableau de signes de $f''(x)$:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $20x^2$		+	0	+		+	
signe de $x-3$		-		-	0	+	
signe de $f''(x)$		-	0	-	0	+	

1 pt **3** En déduire l'existence d'un unique point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.
Laa dérivée seconde s'annule en changeant de signe seulement en $x = 3$, donc le point de C_f d'abscisse 3 est le seul point d'inflexion de C_f.
Si $x = 3$ alors $y = f(3) = 3^5 - 5 \times 3^4 = -162$

$$\boxed{A(3;-162) \text{ est l' unique point d'inflexion de } C_f.}$$

1 pt **4** Etudier enfin la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
On utilise ici la question 2)

- Pour tout $x \in]-\infty;3]$ on a $f''(x) \leq 0$, donc f est concave sur $]-\infty;3]$.
- Pour tout $x \in [3;+\infty[$ on a $f''(x) \geq 0$, donc f est convexe sur $[3;+\infty[$.

Exercice 3 — 5,5 points

u et $v$sont deux fonctions définies par $u(x) = x^2 - 5x + 6$ et $v(x) = -\dfrac{3}{x}$

2.5 pts **1** Déterminer l'ensemble de définition de $v \circ u$ .On justifiera.
Déjà $D_u = \mathbb{R}$ et $D_v = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ En notant $D_{v \circ u}$ l'ensemble de définition de $v \circ u$, et en utilisant la définition :

$$v \circ u(x) = v(u(x))$$

$$\begin{aligned} x \in D_{v\circ u} &\iff \begin{cases} u(x) \text{ existe} \\ v(u(x)) \text{ existe} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in D_u \\ u(x) \in D_v \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ u(x) \neq 0 \end{cases} \\ &\iff x^2 - 5x + 6 \neq 0 \end{aligned}$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ a deux racines évidentes 2 et 3.

$$\boxed{D_{v\circ u} = \mathbb{R} \setminus \{2;3\}}$$

2 Déterminer l'expression de puis celle de sa dérivée. (on admettra que le domaine de dérivabilité sera le même que son domaine de definition)

1 pt ✍

$$\begin{aligned} v \circ u(x) &= v(u(x)) \\ &= v(x^2 - 5x + 6) \\ &= -\frac{3}{x^2 - 5x + 6} \end{aligned}$$

2 pts ✍ Calculons la dérivée :

- Méthode 1 : En posant $f = v \circ u$, $f' = u' \times v'(u)$
  On a $u'(x) = 2x - 5$ et $v'(x) = -3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{3}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times v'(x^2 - 5x + 6) \\ &= (2x - 5) \times \frac{3}{(x^2 - 5x + 6)^2} \\ &= \frac{3(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 6)^2} \end{aligned}$$

✍ Méthode 2 : Comme $f(x) = -\dfrac{3}{x^2-5x+6} = -3 \times \dfrac{1}{x^2-5x+6}$

$f = -3 \times \dfrac{1}{u}$ on a $f' = -3 \times \left(\dfrac{-u'}{u^2}\right) = \dfrac{3u'}{u^2}$

$$\boxed{\text{On retrouve } f'(x) = \dfrac{3(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}}$$

Exercice 4 — 10,5 points

(u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel , $u_{n+1} = u_n + 2$.

1.5 pt **1** Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Prouver que $u_n = 1 + 2n$ pour tout entier naturel n.
On passe de u_n à u_{n+1} en ajoutant 2, la suite (u_n) est donc arithmétique de raison 2.
Comme (u_n) est arithmétique de raison 2, on a $u_n = u_0 + nr = 1 + 2n$

2 La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = v_n + u_n$.

2 pts **a.** Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.

- Ayant $v_{n+1} = v_n + u_n$, en remplaçant n par 0 : $v_1 = v_0 + u_0 = 1 + 1 = 2$
- en remplaçant n par 1 : $v_2 = v_1 + u_1 = 2 + 3 = 5$, en effet $u_1 = 1 + 2 \times 1 = 3$
- en remplaçant n par 2 : $v_3 = v_2 + u_2 = 5 + 5 = 10$, en effet $u_2 = 1 + 2 \times 2 = 5$
- en remplaçant n par 3 : $v_4 = v_3 + u_3 = 102 + 7 = 17$, en effet $u_3 = 1 + 2 \times 3 = 7$

$$\boxed{v_1 = 2, v_2 = 5, v_3 = 10 \text{ et } v_4 = 17.}$$

4 pts **b.** Démontrer, par récurrence que : pour tout entier naturel $n, v_n = 1 + n^2$. Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $v_n = 1 + n^2$ ».

✍ ***Initialisation :***
$v_0 = 1$ et $1 + 0^2 = 1$
Donc la propriété est vraie au rang 0.

✍ ***Hérédité :*** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $v_k = 1 + k^2$.(HR)
On veut prouver que $v_{k+1} = 1 + (k+1)^2$

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k + u_k \\ &= 1 + k^2 + 1 + 2k \qquad \text{d'après (HR) et d'après 1) } v_k = 1 + 2k \\ &= 1 + (k^2 + 2k + 1) \\ &= 1 + (k+1)^2 \end{aligned}$$

✍ ***Conclusion :*** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a « $v_n = 1 + n^2$ ».

3 pts **c.** Etudier la monotonie de (v_n).
On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 1 + (n+1)^2 - (1 + n^2) \\ &= 1 + n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Ici $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ ainsi $2n \geq 0$ puis $2n + 1 \geq 1 > 0$;
Pour tout entier n on a $v_{n+1} - v_n > 0$, donc

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

Exercice 5 — 6 points

(w_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = \dfrac{6n+4}{2n+1}$.

3 pts **1** Montrer que la suite (w_n) est minorée par 3.
Justifier que la suite (w_n) est minorée par 3 revient à prouver que pour tout entier n, on a $w_n \geq 3$. On forme donc $w_n - 3$:

$$\begin{aligned} w_n - 3 &= \frac{6n+4}{2n+1} - 3 \\ &= \frac{6n+4}{2n+1} - \frac{3(2n+1)}{2n+1} \\ &= \frac{6n+4-6n-3}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Ici $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ ainsi $2n \geq 0$ puis $2n+1 \geq 1 > 0$ on a donc $\dfrac{1}{2n+1} > 0$;
On a donc prouvé que pour tout entier n , $w_n - 3 > 0$

$$\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est minorée par 3.}}$$

3 pts **2** Etudier la monotonie de la suite (w_n).
On étudie le signe de $w_{n+1} - w_n$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{6(n+1)+4}{2(n+1)+1} - \frac{6n+4}{2n+1} \\ &= \frac{6n+10}{2n+3} - \frac{6n+4}{2n+1} \\ &= \frac{(6n+10)(2n+1)-(6n+4)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{12n^2+6n+20n+10-(12n^2+18n+8n+12)}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{12n^2+26n+10-12n^2-26n-12}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= -\frac{2}{(2n+3)(2n+1)} \end{aligned}$$

Ici $n \in \mathbb{N}$ donc $n \geq 0$ donc $\left.\begin{array}{l} -2 < 0 \\ 2n+3 > 0 \\ 2n+1 > 0 \end{array}\right\}$ on déduit donc $-\dfrac{2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$

Ainsi pour tout entier n, on a $w_{n+1} - w_n < 0$, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{la suite } (w_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

Exercice 6 — 9 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3xe^{-x} + 1$.

3 pts **1** Calculer sa dérivée f' ainsi que sa dérivée seconde f''.

- $f = uv + 1$ donc $f' = u'v + v'u$ f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f = uv + 1$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x : $\left\{\begin{array}{ll} u(x) &= 3x \\ v(x) &= e^{-x} \end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) &= 3 \\ v'(x) &= -e^{-x} \end{array}\right.$

$\boxed{\text{On utilise la formule } (e^u)' = u'e^u}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{-x} + (-e^{-x}) \times 3x \\ &= 3e^{-x}(1-x) \end{aligned}$$

- f' est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f' = ab$ d'où $f'' = a'b + b'a$ avec pour tout réel $x : \begin{cases} a(x) &= 3(1-x) \\ b(x) &= e^{-x} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} a'(x) &= -3 \\ b'(x) &= -e^{-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3e^{-x} + (-e^{-x}) \times 3(1-x) \\ &= 3e^{-x}(-1-(1-x)) \\ &= 3e^{-x}(-1-1+x) \\ &= 3e^{-x}(x-2) \end{aligned}$$

$\boxed{f'(x) = 3e^{-x}(1-x) \text{ et } f''(x) = 3e^{-x}(x-2)}$

1.75 pt **2** Etudier les variation de f (on ne demandera pas les limites aux bornes).

- Signe de la dérivée : $f'(x) = 3e^{-x}(1-x)$
  La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $f'(x)$ a le signe de $(1-x)$

  ✍ $f'(x) = 0 \iff 1-x = 0 \iff x = 1$
  ✍ $f'(x) > 0 \iff 1-x > 0 \iff -x > -1 \iff x < 1$ $(-1 < 0)$

- On déduit le tableau de variations de f sur $]-\infty;+\infty[$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗	$3e^{-1}+1$	↘	

$f(1) = 3e^{-1} + 1$

1.75 pt **3** Etudier la convexité de f.

- On étudie le signe de la dérivée seconde :
  La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$ de même $3 > 0$, on déduit que $f''(x)$ a le signe de $(x-2)$

  ✍ $f''(x) = 0 \iff x-2 = 0 \iff x = 2$
  ✍ $f''(x) > 0 \iff x-2 > 0 \iff x > 2$
  ✍

- Tableau de signe :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f''(x)$		-	0	$+$	

$\boxed{f \text{ est concave sur }]-\infty;2] \text{ et } f \text{ est convexe sur } [2;+\infty[}$

1.25 pt **4** Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

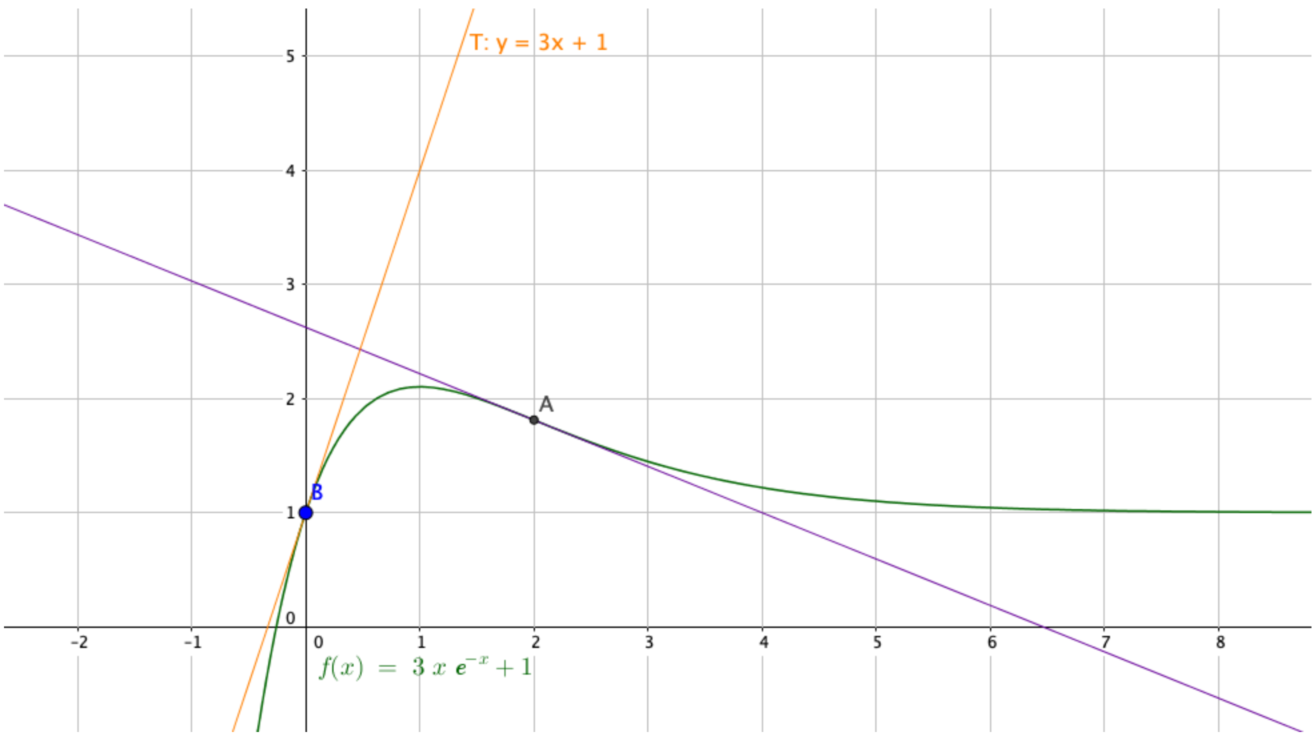
✏ $f'(0) = 3$
✏ $f(0) = 1$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 3(x-0)+1, \text{ soit } y = 3x+1}$$

1.25 pt **5** En déduire que pour tout $x \in]-\infty; 2]$ on a :

$$3xe^{-x} + 1 \leq 3x + 1$$

f est concave sur $]-\infty; 2]$ donc C_f est située en dessous de ses tangentes sur $]-\infty; 2]$.
Ainsi pour tout $x \in]-\infty; 2]$, $y_{C_f} \leq y_T$, soit encore $3xe^{-x} + 1 \leq 3x + 1$ Une figure non demandée :



Exercice 7 Bonus : deux questions indépendantes ! — 3,5 points

3.5 pts

1 La suite de terme général $(-1)^n$ ne prend que les valeurs 1 et -1 de façon alternée ;
donner le terme général d ?une suite qui ne prend que les valeurs a et b de façon alternée.

- Analse : On cherche deux réels α et β tels que $u_n = \alpha(-1)^n + \beta$

$$\begin{cases} u_{2p} = a \\ u_{2p+1} b \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha(-1)^{2p} + \beta = a \\ \alpha(-1)^{2p+1} + \beta = b \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = a \\ -\alpha + \beta = b \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{a-b}{2} \\ \beta = \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

- Synthèse : On vérifie que si pour tout entier n, on a : $u_n == \dfrac{a-b}{2} \times (-1)^n + \dfrac{a+b}{2}$ alors $\begin{cases} u_{2p} = a \\ u_{2p+1} = b \end{cases}$

$$\boxed{\text{Une suite solution est définie pour tout entier } n \text{ par : } u_n = \dfrac{a-b}{2} \times (-1)^n + \dfrac{a+b}{2}}$$

2 **a.** Justifier que si a est solution de $f(x) = x$ alors a est aussi solution de $f(f(x)) = x$.
Si a est solution de l'équation $f(x) = x$, alors :

$$f(a) = a$$

$$\text{Alors } f(f(a)) = f(a) = a$$

$$\boxed{\text{Ayant } f(f(a)) = a,\ a \text{ est bien solution de l'équation } f(f(x)) = x.}$$

b. En déduire les solutions de $(x^2 + x - 1)^2 + (x^2 + x - 1) - 1 = x$
$(x^2 + x - 1)^2 + (x^2 + x - 1) - 1 = x$ s'écrit $f(f(x)) = x$ où $f(x) = x^2 + x - 1$
On résout déjà l'équation $f(x) = x$ qui sont d'après le a) des solutions de l'équation $f(f(x)) = x$

$$f(x) = x \iff x^2 + x - 1 = x \iff x^2 - 1 = 0 \iff (x-1)(x+1) = 0 \iff x = \pm 1$$

$$\begin{aligned} (x^2 + x - 1)^2 + (x^2 + x - 1) - 1 = x &\iff x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + x^2 + x - 1 - 1 = x \\ &\iff x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Sachant que 1 et -1 sont racines de ce polynôme, on peut le factoriser par $(x-1)(x+1) = (x^2 - 1)$.
ainsi il existe un polynôme $Q(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $P(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^2 - bx - c \\ &= ax^4 + bx^3 + (c-a)x^2 - bx - c \\ \text{Or } P(x) &= x^4 + 2x^3 - 2x - 1 \end{aligned}$$

En identifiant les termes de même degré, il vient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c - a = 0 \\ -b = -2 \\ -c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = a = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } P(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1)}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (x^2 + x - 1)^2 + (x^2 + x - 1) - 1 = x &\iff (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 0 \\ &\iff (x-1)(x+1)(x+1)^2 = 0) \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'équation } (x^2 + x - 1)^2 + (x^2 + x - 1) - 1 = x \text{ a pour ensemble de solutions } \mathcal{S} = \{-1; 1\}.}$$