Nom :	**DS 01**	TMATHS OISELET — *Devoir n° 02*	*Sept. 2023* …/…
Prénom :			

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 2CM — 5 points

5 pts

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Réponse	**a.**	**d.**	**c.**	**b.**	**b.**

Exercice 2 : Simplifions ! — 5,75 points

5.75 pts

1 Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A=\frac{e^6\times e^{-4}}{e^{-3}}\qquad B=\frac{e^{1+x}}{e^{x+2}}\qquad C=\frac{\left(e^{-2x}\right)^3\times e^{4x}}{e^{-2x}}$$

$$\begin{aligned} A&=\frac{e^6\times e^{-4}}{e^{-3}}\\ &=\frac{e^2}{e^{-3}}\\ &=e^5\end{aligned}\qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} B&=\frac{e^{1+x}}{e^{x+2}}\\ &=e^{1+x-(x+2)}\\ &=e^{-1}\end{aligned}\qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} C&=\frac{\left(e^{-2x}\right)^3\times e^{4x}}{e^{-2x}}\\ &=\frac{e^{-6x}\times e^{4x}}{e^{-2x}}\\ &=\frac{e^{-2x}}{e^{-2x}}=1\end{aligned}$$

$$\boxed{A=e^5\qquad B=e^{-1}\qquad C=1}$$

2 Montrer les égalités suivantes, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

a. $2e^{2x}+6e^x-8=2\left(e^x-1\right)\left(e^x+4\right)$

$$\begin{aligned} 2\left(e^x-1\right)\left(e^x+4\right)&=2\left(\mathrm{e}^{2x}+4e^x-e^x-4\right)\\ &=2\left(\mathrm{e}^{2x}+3e^x-4\right)\\ &=2e^{2x}+6e^x-8\end{aligned}$$

b. $\dfrac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{e^{2x}}=1-e^{-2x}$

$$\begin{aligned} \frac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{e^{2x}}&=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}\\ &=\frac{e^{2x}}{e^{2x}}-\frac{1}{e^{2x}}\\ &=1-e^{-2x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R}\text{, on a } 2e^{2x}+6e^x-8=2\left(e^x-1\right)\left(e^x+4\right)\text{ et }\frac{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}{e^{2x}}=1-e^{-2x}}$$

Exercice 3 : Equations et Inéquations **5,5 points**

5.5 pts Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1 $e^{2x-3} = e^2$

On utilise la propriété $e^a = e^b \iff a = b$.

$$\begin{aligned} e^{2x-3} = e^2 &\iff 2x-3=2 \\ &\iff 2x=5 \\ &\iff x=\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{2}\right\}}$$

2 $(5x-7)e^{3x-1} = 0$

On est ici en présence d'un équation produit :

$$\begin{aligned} (5x-7)e^{3x-1} = 0 &\iff 5x-7=0 \text{ ou } e^{3x-1}=0 && \text{Règle du produit nul} \\ &\iff x=\frac{7}{5} && \text{car la fonction exp est strictement positive.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{7}{5}\right\}}$$

3 $e^{-x} - 1 \leq 0$.

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 \leq 0 &\iff e^{-x} \leq 1 \\ &\iff e^{-x} \leq e^0 \\ &\iff -x \leq 0 && \text{car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = [0;+\infty[}$$

4 $(6-5x)e^x > 0$.

On étudie le signe de chaque facteur du produit et n fait le bilan dans un tableau de signes :

- ✍ Pour tout réel x on a $e^x > 0$.
  Ainsi pour tout réel x ; e^x est strictement positif.
- ✍ $6-5x > 0 \iff -5x > -6 \iff x < \dfrac{6}{5}$ en divisant par $-5 < 0$.
- ✍ On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{6}{5}$		$+\infty$
signe de e^x		$+$		$+$	
signe de $6-5x$		$+$	0	-	
signe de $f(x)$		$+$	0	-	

On lit l'ensemble des solutions sur le tableau précédent :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty;\frac{6}{5}\right[}$$

Exercice 4 — 5,5 points

5.5 pts Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

1 $f(x) = 7x^2 + 5x + 1 - 3e^x$

$$\boxed{f'(x) = 14x + 5 - 3e^x}$$

2 $g(x) = (3x+5)e^x$

g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$g = uv$, d'où $g' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= 3x+5 \\ v(x) &= e^x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 3 \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3e^x + (3x+5)e^x \\ &= (3+3x+5)e^x \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = (3x+8)e^x}$$

3 $h(x) = \dfrac{e^x+1}{3e^x+2}$

h est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$h = \dfrac{u}{v}$ d'où $h' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= e^x+1 \\ v(x) &= 3e^x+2 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= e^x \\ v'(x) &= 3e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{e^x(3e^x+2) - 3e^x(e^x+1))}{(3e^x+2)^2} \\ &= \frac{e^x(3e^x+2-3(e^x+1))}{(3e^x+2)^2} \\ &= \frac{e^x(3e^x+2-3e^x-3)}{(3e^x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = -\frac{e^x}{(3e^x+2)^2}}$$

Exercice 5 : Variations — 4,25 points

4.25 pts Soit la fonction f définie sur $[0;5]$ par : $f(x) = (4x-1)e^{-x}$

1 Déterminer et factoriser $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.

f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= 4x-1 \\ v(x) &= e^{-x} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 4 \\ v'(x) &= -e^{-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4e^{-x} + (4x-1)(-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(4-(4x-1)) \\ &= e^{-x}(4-4x+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (5-4x)e^{-x}}$$

2 Résoudre $f'(x) = 0$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0;5]$ en précisant les valeurs exactes des bornes et du maximum de f.

Tout d'abord, la fonction exponentielle étant strctement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $f'(x)$ a le signe de $5-4x$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 5-4x = 0 \\ &\iff -4x = -5 \\ &\iff x = \frac{5}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 5-4x > 0 \\ &\iff -4x > -5 \\ &\iff x < \frac{5}{4} \end{aligned}$$

On déduit le tableau de variations de f sur $[0;5]$:

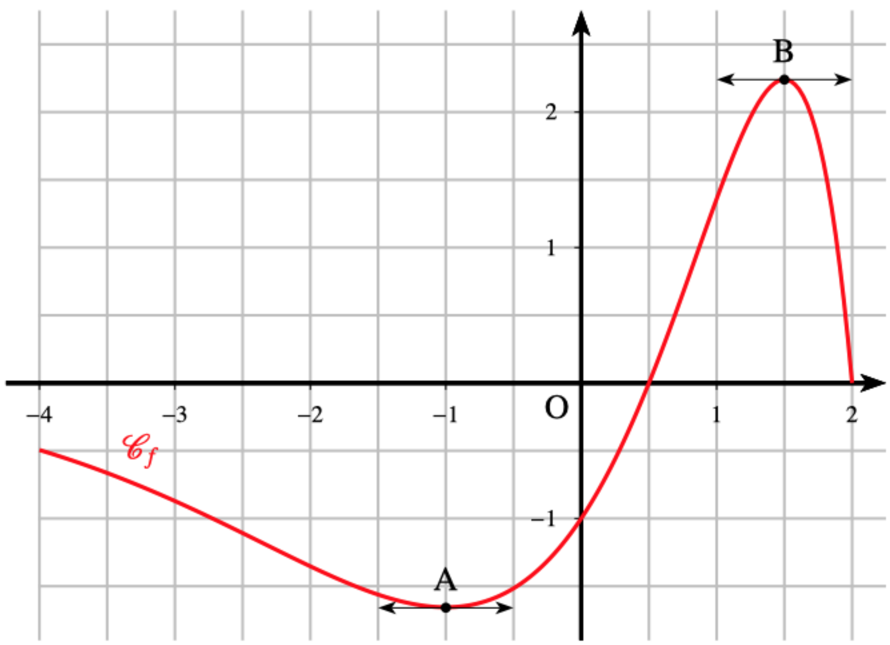
x	0		$\frac{5}{4}$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-1	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$	$\searrow$	$19e^{-5}$

$\boxed{f \text{ présente un maximum en } \frac{5}{4} \text{ qui vaut } 4\mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}.}$

Exercice 6 Représentation graphique et fonction — 8,5 points

8.5 pts

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4;2]$ dont on donne la courbe C_f ci-dessous.



1 Résoudre graphiquement $f'(x) = 0$ et $f'(x) \leq 0$. Justifier.
Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont les abscisses des points de C_f à tangente horizontale. On lit :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-1; 1,5\}}$$

Comme f est décroissante sur chacun des intervalles $[-4;-1]$ et $[1,5;2]$, on déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \leq 0$ est :

$$\boxed{\mathcal{S} = [-4;-1] \cup [1,5;2]}$$

2 On admet que la fonction f est définie par : $f(x) = (-x^2 + 2,5x - 1)e^x$.

a. Déterminer la fonction dérivée f' .
f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= -x^2 + 2,5x - 1 \\ v(x) &= e^x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= -2x + 2,5 \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-2x + 2,5)e^x + (-x^2 + 2,5x - 1)e^x \\ &= e^x(-2x + 2,5 - x^2 + 2,5x - 1) \\ &= e^x(-x^2 + 0,5x + 1,5) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-x^2 + 0,5x + 1,5)e^x}$$

b. Étudier le signe de la fonction f' sur [-4 ; 2] puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur [-4 ; 2].
Tout d'abord, la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $f'(x)$ a le signe de $-x^2 + 0,5x + 1,5$.
Ainsi $f'(x)$ a le signe de $-x^2 + 0,5x + 1,5$ ou de $2(-x^2 + 0,5x + 1,5) = -2x^2 + x + 3$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-2) \times 3 = 25$

$$\begin{array}{ll|ll} x_1 & = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 & = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ & = \dfrac{-1 + 5}{-4} & & = \dfrac{-1 - 5}{-4} \\ & = -1 & & = \frac{3}{2} \end{array}$$

$-2x^2 + 5x - 2$ est un trinôme du second degré qui a pour racines $\frac{1}{2}$ et 2 ; il a donc le signe de $a = -2$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $-x^2 + 0.5x + 1.5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On déduit le tableau de variations de f sur $[-4; 2]$:

x	-4		-1		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		
Variations de f	$-27e^{-4}$	$\searrow$	$-4.5e^{-1}$	$\nearrow$	$0.5e^{1.5}$	$\searrow$	0

c. Déterminer l'équation de la tangente à C_f en $\dfrac{1}{2}$.

T a pour équation $y = f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

✏ $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$

✏ $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0, \text{ soit } y = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}x - \frac{3}{4}e^{\frac{1}{2}}}$$

Exercice 7 — 3 points

3 pts On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par ch : $x \mapsto \text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et sinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par sh : $x \mapsto \text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

1 Montrez que $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$ puis que $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$.

$$\begin{aligned} \text{ch}(x) + \text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x} + e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{2e^x}{2} = e^x \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} \text{ch}(x) - \text{sh}(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } \text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x \text{ et } \text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}}$$

2 Montrez que $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

$$\begin{aligned} \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) &= (\text{ch}(x) + \text{sh}(x))(\text{ch}(x) - \text{sh}(x)) \\ &= e^x \times e^{-x} \\ &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a ainsi prouvé pour tout réel } x, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1}$$

Exercice 8 Une modélisation — 5,25 points

5.25 pts On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-3x}$ avec a et b deux réels.

1 Calculer $f'(x)$. f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= ax + b \\ v(x) &= e^{-3x} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= a \\ v'(x) &= -3e^{-3x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{-3x} - 3(ax + b)e^{-3x} \\ &= (-3ax + a - 3b)e^{-3x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-3ax + a - 3b)e^{-3x}}$$

2 Trouver a et b sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\iff (a \times 0 + b)e^0 = 1 \\ &\iff b = 1 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} f'(0) = 3 &\iff (-3a \times 0 + a - 3b)e^0 = 0 \\ &\iff a - 3b = 0 \\ &\iff a = 3b = 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = (3x + 1)e^{-3x}}$$

3 Etudier les variations de f.

- ✍ Dérivée : $f'(x) = (-3ax + a - 3b)e^{-3x} = -9xe^{-3x}$
- ✍ Signe de la dérivée : la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $f'(x)$ a le signe de $(-9x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -9x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -9x > 0 \\ &\iff x < 0 \end{aligned}$$

✍ On déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

4 Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, au point d'abscisse 0.
T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

✂ $f'(0) = 0$

✂ $f(0) = 1$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 0(x-0)+1, \text{ soit } y = 1}$$

Exercice 9 — Pour occuper celles et ceux qui vont trop vite ! — *4 points*

4 pts Montrer que pour tous réels a et b on a :

$$\text{Si } a < b \quad \text{alors} \quad e^a < \frac{e^b - e^a}{b-a} < e^b$$

On démare la preuve de cette double inégalité, en remplaçant b par une variable x, on doit donc établir que :

$$\text{Si } a < x \quad \text{alors} \quad e^a < \frac{e^x - e^a}{x-a} < e^x$$

✍ Première étape : on prouve que Si $a < x$ alors $e^a < \dfrac{e^x - e^a}{x-a}$
Comme ici $x > a$ on déduit $x - a > 0$, donc en mutipliant par $(x-a) > 0$, on doit prouver que $(x-a)e^a < e^x - e^a$ ou encore que si $x > a$ alors $(x-a)e^a + e^a < e^x$.
Si on pose $f(x) = e^x$, l'équation de la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, soit $y = (x-a)e^a + e^a$
Or la fonction exponentielle est convexe, en effet sa dérivée seconde est $f''(x) = e^x$ qui est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la coube C_f est située au dessus de sa tangente T_a, d'où l'inégalité souhaitée.

✍ Deuxième étape : on prouve que si $x > a$ alors $\dfrac{e^x - e^a}{x-a} < e^x$.
Comme ici $x > a$ on déduit $x - a > 0$, donc en mutipliant par $(x-a) > 0$, on doit prouver que $e^x - e^a < (x-a)e^x$.
ou encore que si $x > a$ alors $e^x - e^a - (x-a)e^x < 0$
On note $\varphi : x \mapsto e^x - e^a - (x-a)e^x$

- Dérivée :
  $\varphi'(x) = e^x - (1 \times e^x + (x-a)e^x) = e^x - e^x - (x-a)e^x = -(x-a)e^x$
- Tableau de variation de φ sur $[a;+\infty[$:

x	a		$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	$-$	
Variations de φ	0	$\searrow$	

Comme φ est strictement décroissante sur $]a;+\infty[$, on déduit que si $x > a$ alors $\varphi(x) < \varphi(a)$, soit $\varphi(x) < 0$, ce qui est l'inégalité souhaitée.

✍ Les deux étapes fournissent l'encadrement demandé par l'énoncé !