Lycée l' Oiselet

Mardi 13 Février 2024

BACCALAURÉAT BLANC 2024
DE MATHÉMATIQUES
– SPÉCIALITÉ - MATHS –

Correction du sujet 2

Durée de l'épreuve : 4 HEURES

Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

Sujet 2

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le barème est approximatif.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- *Le nom de votre professeur de Spécialité.*

Exercice 1

5 points

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

- les tirs à deux points.
  Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.
- les tirs à trois points.
  Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

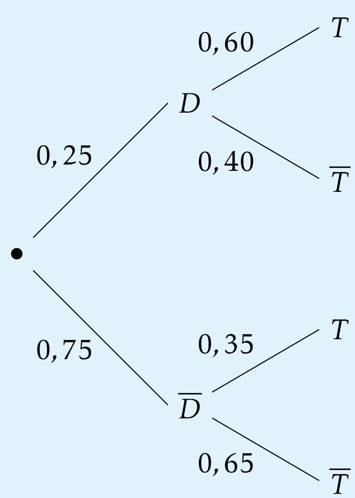
Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60 % sont réussis.
- Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35 % sont réussis.

1 Stéphanie réalise un tir.
On considère les évènements suivants :

D : « Il s'agit d'un tir à deux points ».
R : « le tir est réussi ».

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



b. Calculer la probabilité $p\left(\overline{D} \cap R\right)$.
$p\left(\overline{D} \cap R\right) = p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 = 0,2625$.

$$\boxed{p\left(\overline{D} \cap R\right) = 0,2625.}$$

c. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à 0, 4125.
On a de même $p(D \cap R) = p(D) \times p_D(R) = 0,25 \times 0,6 = 0,15$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(R) = p(D \cap R) + p\left(\overline{D} \cap R\right) = 0,15 + 0,2625 = 0,4125$.

d. Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

Il faut trouver $p_R\left(\overline{D}\right) = \dfrac{p\left(R \cap \overline{D}\right)}{p(R)} = \dfrac{0,2625}{0,4125} \approx 0,6364$, soit 0,64 au centième près.

$$\boxed{p_R\left(\overline{D}\right) \approx 0,64}$$

2 Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à $0,35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

On répète 10 fois, de façon indépendante,l'expérience « Stéphanie fait un tir à trois points » qui comporte 2 issues :

- « Le tir est réussi » considéré comme succès, de probabilité $p = 0.35$
- « Le tir n'est pas réussi » considéré comme échec, de probabilité $q = 1 - p = 0.65$

Nous sommes donc en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.35$ notée $\mathscr{B}(10; 0.35)$.

Pour tout entier k où $0 \leq k \leq 10$, on a

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \times (0.35)^k \times (0.65)^{10-k}$$

b. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On a $E(X) = np = 10 \times 0,35 = 3,5$: en moyenne sur 20 tirs Stéphanie en réussira 7.

c. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au centième.

Le nombre de tirs ratés est $10 - X$, on veut calculer $P(10 - X \geq 4) = P(X \leq 6)$

[2nd] [DISTR] [B] [binomFRép(] [10] [,] [0.35] [,] [6] [)]

binomFRép$(10, 0.35, 6) \approx 0,97$

La calculatrice donne $p(X \leqslant 6) \approx 0,97$.

$$\boxed{p(X \leqslant 6) \approx 0,97.}$$

d. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au centième.

$10 - X \leq 4 \iff X \geq 6$

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 6) &= 1 - p(\overline{X \geqslant 6}) \\ &= 1 - P(X < 6) \\ &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - \text{BinomFRép}(10, 0.35, 5) \\ &\approx 0,095 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(X \geqslant 6) \approx 0,095.}$$

3 Soit n un entier naturel non nul.

Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à $0,35$.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à $0,99$.

La probabilité de rater n tirs à 3 points est égale à $0,65^n$, donc celle d'en réussir au moins un est $1 - 0,65^n$.

Il faut donc résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $1 - 0,65^n \geqslant 0,99$

$$\begin{aligned} 1 - 0,65^n \geqslant 0,99 &\iff 0,01 \geqslant 0,65^n \\ \text{soit par croissance de la fonction logarithme népérien :} & \\ &\iff \ln 0,01 \geqslant n \ln 0,65 \\ &\iff \frac{\ln 0,01}{\ln 0,65} \leqslant n \text{ (car } \ln 0,65 < 0) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,65} \approx 10,69$; le plus petit naturel solution est donc 11.

$\boxed{\text{Stéphanie doit tenter 11 tirs.}}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1 **a.** Déterminer soigneusement $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

D'après une limite du cours : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, on a donc :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} (4\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 6x = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \text{ donc la droite d'équation } x = 0 \text{ est asymptote verticale à } \mathcal{C}_f\ .}$$

b. Déterminer soigneusement $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

- On factorise par le terme prépondérant x^2 :

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{6}{x} + 4\frac{\ln x}{x}\right)$$

- On utilise la limite de référence : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{6}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 4\dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{6}{x} + 4\frac{\ln x}{x}\right) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 - \dfrac{6}{x} + 4\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$$

2 **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.
f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f = u + v$ d'où $f' = u' + v'$ avec pour tout réel x, dans $]0\,;\,+\infty[$: $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = x^2 - 6x \\ v(x) & = 4\ln x \end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = 2x - 4 \\ v'(x) & = \dfrac{4}{x} \end{array}\right.$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 6 + \frac{4}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 6x + 4}{x} \\ &= \frac{2(x^2 - 3x + 2)}{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2(x^2 - 3x + 2)}{x}}$$

b. Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

- On travaille sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc $x > 0$, par ailleurs $2 > 0$, donc $f'(x) > 0$ a le signe du trinôme $x^2 - 3x + 2$.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 1$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$x^2 - 3x + 2$ est un trinôme du second degré qui a pour racines 1 et 2; il a donc le signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
signe de $x^2 - 3x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$4(\ln 2 - 2)$	$\nearrow$	$+\infty$

3 Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x =e.
T a pour équation $y = f'(e)(x-e) + f(e)$

✏ $f'(e) = \dfrac{2(e^2 - 3e + 2)}{e} = 2(e - 3 + 2e^{-1})$

✏ $f(e) = e^2 - 6e + 4\ln e = e^2 - 6 + 4$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 2(e-3+2e^{-1})(x-e) + e^2 - 6 + 4}$$

4 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On note α cette solution.

- Tout d'abord, sur l'intervalle $]0;2[$, f présente un maximum en 1 qui vaut -5, ainsi pour tout $x \in]0;2[$, on a $f(x) \leq -5 < 0$.
  Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur l'intervalle $]0;2[$.
- Sur l'intervalle $[2;+\infty[$ d'après le théorème de la bijection :

  ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $[2;+\infty[$.
  ✍ f est strictement croissante sur l' intervalle $[2;+\infty[$.
  ✍ $f(2) = 4(\ln 2 - 2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

✍ f réalise donc une bijection de $[2;+\infty[$ sur $[4(\ln 2-2;+\infty[$
Comme $0 \in [4(\ln 2-2;+\infty[$(en effet $4(\ln 2-2) \approx -5.2$), l'équation $f(x)=0$ a une racine unique α dans $[2;+\infty[$.

5 Donner, en le justifiant, une valeur approchée de α au centième.
Avec une calculatrice, on obtient $f(4.68) \approx -0.004$ et $f(4.69) \approx 0.04$.

$$\boxed{4.68 \text{ est une valeur approchée de } \alpha \text{ au centième.}}$$

6 En déduire le signe de $f(x)$ sur l' intervalle $]0;+\infty[$.

x	2		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$		$+$	
Variations de f	$4(\ln 2-2)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $f(x)$		-	0	$+$	

On déduit ainsi le signe de $f(x)$ sur l'intervalle d'étude :

x	0		α		$+\infty$
signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	

7 **a.** On admet que pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a $f''(x)=\dfrac{2x^2-4}{x^2}$
Etudier la convexité de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On peut écrire

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2x^2-4}{x^2} \\ &\frac{2(x^2-2)}{x^2} \\ &\frac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2}}$$

Sur $]0\,;\,+\infty[$ on a $x>0$, on déduit :

$$\begin{cases} x+\sqrt{2}>0 \\ 2>0 \\ x^2>0 \end{cases}$$

Ainsi $f''(x)$ a le signe de $(x-\sqrt{2})$; on déduit ainsi le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle d'étude :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $f''(x)$	||	$-$	0	$+$	

- f est concave sur $]0;\sqrt{2}]$.
- f est convexe sur $[\sqrt{2};+\infty[$.

b. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T sur l'intervalle $[\sqrt{2}\ ;\ +\infty[$.
Comme $e \in [\sqrt{2};+\infty[$ et comme f est convexe sur $[\sqrt{2};+\infty[$, on peut affirmer que la la tangente T au point d'abscisse x =e est située en dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3

5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(2 ; 5 ; −1), B(3 ; 2 ; 1), C(1 ; 3 ; −2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+k \\ y & = & 1-4k \\ z & = & 2+3k \end{array}\right., k \in \mathbb{R}.$$

1 Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ?

Réponse A : M(1 ; 9 ; 8); **Réponse B :** N(−3 ; −4 ; 6);
Réponse C : P(0 ; 13 ; −7); **Réponse D :** Q(−5 ; −7 ; −1).

$$M\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \in \Delta \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & 3+k \\ 9 & = & 1-4k \\ 8 & = & 2+3k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} k & = & -2 \\ k & = & -2 \\ k & = & 2 \end{array}\right.$$

Donc $M \notin \Delta$.

$$P\begin{pmatrix}0\\13\\-7\end{pmatrix} \in \Delta \iff \left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & 3+k \\ 13 & = & 1-4k \\ -7 & = & 2+3k \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} k & = & -3 \\ k & = & -3 \\ k & = & -3 \end{array}\right.$$

Donc $P \in \Delta$.

La bonne réponse est **C .**

2 Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

Réponse A : $\begin{pmatrix}2,5\\3,5\\0\end{pmatrix}$; **Réponse B :** $\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$;

Réponse C : $\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ **Réponse D :** $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-2\\2-5\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

La bonne réponse est **C .**

3 Une représentation paramétrique de la droite (BC) est :

Réponse A : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse B : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse C : $\begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse D : $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

La droite (BC) admet comme vecteur directeur $\overrightarrow{\text{BC}}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1-3 \\ 3-2 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On peut donc éliminer la réponse A et B, droites dirigées respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$t = -1$ dans $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ donne $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Ainsi la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ passe par B$(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

La bonne réponse est **D .**

4 Les droites (BC) et Δ sont :

Réponse A : strictement parallèles ;

Réponse B :sécantes en R$(1\ ;9\ ;\ -4)$;

Réponse C : non coplanaires ;

Réponse D : sécantes en S$(4\ ;3\ ;\ 2)$;

(BC) est dirigée par $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et Δ est dirigée par $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Comme $\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-4}$, les droites (BC) et Δ ne sont pas parallèles.
On détermine (BC)$\cap\Delta$:

$$M \in (BC) \cap \Delta \iff \begin{cases} 3 + k = 5 + 2t \\ 1 - 4k = 1 - t \\ 2 + 3k = 4 + 3t \end{cases} \iff \begin{cases} k - 2t = 2 \\ 4k - t = 0 \\ 3k - 3t = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} k = -\frac{2}{7} \\ t = -\frac{8}{7} \\ 3k - 3t = 2\ (1) \end{cases}$$

Mais $3k - 2t = 3 \times \left(-\frac{2}{7}\right) - 3 \times \left(-\frac{8}{7}\right) = \frac{18}{7}$ et $\frac{18}{7} \neq 2$ donc (1) est incompatible. Donc les droites (BC) et Δ sont non coplanaires.

La bonne réponse est **C .**

5 On donne U$(1\ ;0\ ;\ 2)$ et on rappelle N$(-3\ ;\ -4\ ;\ 6)$ et T est le milieu de $[UN]$:

Réponse A : T$(-4\ ;\ -4\ ;\ 4)$;

Réponse B : T$(-2\ ;\ -4\ ;\ 8)$;

Réponse C : T$(-1\ ;\ -2\ ;\ 4)$;

Réponse D : T$(2\ ;\ 2\ ;\ -2)$;

T le milieu de $[UN]$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x_U+x_N}{2} \\ \frac{y_U+y_N}{2} \\ \frac{z_U+z_N}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{La bonne réponse est } \mathbf{C}.}$$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1 Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On calcule la dérivée et on étudie son signe : comme $f(x) = -4 \times \frac{1}{x+2}$, on utilise $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

Ainsi $f'(x) = -4 \times \left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right)$

$$\boxed{f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}}$$

Le carré d'un réel non nul est strictement positif, ainsi $\left.\begin{array}{l} 4 > 0 \\ \text{Si } x \geq 0\ (x+2)^2 > 0 \end{array}\right\}$ donc $f'(x) > 0$.

On déduit que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2 Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α la solution. On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad & \iff 5 - \frac{4}{x+2} = x \\ & \iff 5 - x = \frac{4}{x+2} \\ & \iff (5-x)(x+2) = 4 \\ & \iff -x^2 + 3x + 10 - 4 = 0 \\ & \iff x^2 - 3x - 6 = 0 \end{aligned}$$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = 33$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{3 + \sqrt{33}}{2} & &= \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

Comme $x_2 < 0$, seul x_1 est solution sur $[0;+\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ sur l'intervalle } [0 ; +\infty[\text{ a pour unique solution } \alpha = \frac{3+\sqrt{33}}{2} \approx 4,37}$$

3 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n)?

La suite (u_n) semble croissante. Par ailleurs on conjecture que la suite (u_n) converge vers α.

4 **a.** Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

où α est le réel défini dans la question 2.

Notons $\pi(n)$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

- Initialisation : $u_1 = 5 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{11}{3} \approx 3,67$, et comme $\alpha \approx 4,37$, on donc $0 \leq 1 \leq \dfrac{11}{3} \leq \alpha$.
  on a bien
  $$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$$
  Ainsi $\pi(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $k \geq 0$, on suppose que $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \alpha$
  comme la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on déduit :
  $$f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(\alpha)$$
  soit
  $$3 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \alpha$$
  En effet $u_{n+1} = f(u_n)$. et α est solution de l'équation $f(x) = x$, donc $f(\alpha) = \alpha$.
  On a donc
  $$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \alpha$$
  La propriété $\pi(n)$ est donc héréditaire.
- Conclusion : $\pi(0)$ est vraie, et la propriété $\pi(n)$ est héréditaire. Le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a :
  $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

- Ayant pour tout entier n ; $u_n \leqslant u_{n+1}$, la suite (u_n) est croissante.
- Ayant pour tout entier n ; $u_n \leqslant \alpha$, la suite (u_n) est majorée par α.

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante et majorée ; elle est donc convergente.}}$$

5 Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

a. Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

On a successivement

$$\begin{aligned} u_1 &= 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} \\ u_2 &= 5 - \frac{4}{\frac{11}{3} + 2} = 5 - \frac{12}{17} = \frac{73}{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0 = 1 \\ S_1 &= u_0 + u_1 = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3} \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 = S_1 + u_2 = \frac{14}{3} + \frac{73}{17} = \frac{457}{51} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_0 = 1 ; S_1 = \frac{14}{3} \text{ et } S_2 = \frac{457}{51}}$$

b. Compléter l'algorithme donné en **annexe** 2 pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

Annexe 2 de l'exercice à rendre avec la copie

ANNEXE 1

ANNEXE 2

```
def somme(N) :
    u=1
    s=u
    i=0
    while i < n :
        u= 5 − 4/(u+2)
        i=i+1
        s=s + u
    return s
```

c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.

On a prouvé que la suite (u_n) est croissante, ainsi pour tout entier n , $u_n \geq u_0$, soit $u_n \geq 1$.

$$\begin{array}{ll} u_0 & \geq 1 \\ u_1 & \geq 1 \\ u_2 & \geq 1 \\ \cdots & \cdots \\ u_n & \geq 1 \end{array}$$

En ajoutant membre à membre ces $n+1$ inégalités de même sens, on obtient :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \geq n+1$$

soit $S_n \geq n+1$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$, on déduit grâce au théorème de minoration :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$$