Nom :	DS 09	TMATHS OISELET Devoir n° 18	Mai 2023 …/…
Prénom :			

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 14 points

14 pts Calculer les intégrales suivantes

- $I_1 = \displaystyle\int_1^2 (3x^2-2x+1)\,dx = \left[x^3-x^2+x\right]_2^1 = 8-4+2-(1-1+1) = 6-1$ soit $\boxed{I_1 = 5}$
- $I_2 = \displaystyle\int_2^1 \frac{1}{t^4}\,dt = \int_2^1 t^{-4}\,dt = \left[\frac{t^{-4+1}}{-4+1}\right]_2^1 = \left[\frac{t^{-3}}{-3}\right]_2^1 = \left[\frac{1}{-3t^3}\right]_2^1 = -\frac{1}{3}-(-\frac{1}{24})$ soit $\boxed{I_2 = -\frac{7}{24}}$
- $I_3 = \displaystyle\int_0^1 (4t+1)^3\,dt$

  Posons $f(t) = (4t+1)^3$, en écrivant $u(t) = 4t+1$ on a $u'(t) = 4$ et donc
  $f = \frac{1}{4}u^3 \times u'$ d'où on déduit $F = \frac{1}{4}\frac{u^{3+1}}{3+1} = \frac{1}{16}u^4$
  Ainsi $I_3 = \left[\frac{1}{16}(4t+1)^4\right]_0^1 = \frac{5^4}{16} - \frac{1^4}{16} = \frac{624}{16}$ soit $\boxed{I_3 = 39}$
- $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3x+2}\,dx$

  Posons $f(x) = \frac{1}{3x+2}$, en écrivant $u(x) = 3x+2$ on a $u'(x) = 3$ et donc
  $f = \frac{1}{3}\frac{u'}{u}$ d'où on déduit $F = \frac{1}{3}\ln|u|$
  Ainsi $I_4 = \left[\frac{1}{3}\ln|3x+2|\right]_1^2 = \frac{1}{3}\ln 5 - \frac{1}{3}\ln 2$ soit $\boxed{I_4 = \frac{1}{3}\ln(\frac{5}{2})}$
- $I_5 = \displaystyle\int_1^2 x^2 e^{x^3}\,dx$

  En posant $u(x) = x^3$ on a $u'(x) = 3x^2$; on reconnaît donc la forme $\frac{1}{3}u'e^u$ qui a pour primitive $\frac{1}{3}e^u$.

  Ainsi $I_5 = \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}e^8 - \frac{1}{3}e^1$ soit $\boxed{I_5 = \frac{e^8-e}{3}}$
- $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

  En posant $u(x) = x^2+x+1$; on a $u'(x) = 2x+1$ et donc $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$
  donc $F = 2\sqrt{u}$
  Ainsi $I_6 = \left[2\sqrt{x^2+x+1}\right]_0^1 = 2\sqrt{3}-2$ soit $\boxed{I_6 = 2\sqrt{3}-2}$

Exercice 2 — 8 points

8 pts Calculer les intégrales suivantes au moyen d'une intégration par parties suivie d'une seconde s'il le faut :

☞ $I_1 = \int_1^e x^3 \ln x \, dx$

$$\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x^3 & v(x) = \dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $]0;+\infty[$ donc sur $[1;e]$; on peut donc faire une intégration par parties :

On a alors $I_1 = \left[\dfrac{1}{4}x^4 \times \ln x\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \dfrac{1}{4}x^4 \times \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Soit $I_1 = \left[\dfrac{1}{4}x^4 \times \ln x\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \dfrac{1}{4}x^3\,\mathrm{d}x$.

$I_1 = \left[\dfrac{1}{4}x^4 \times \ln x - \dfrac{1}{16}x^4\right]_1^e$

$I_1 = \dfrac{1}{4}e^4 \times \ln e - \dfrac{1}{16}e^4 - [\dfrac{1}{4}1^4 \times \ln 1 - \dfrac{1}{16}1^4]$ soit $\boxed{I_1 = \dfrac{3e^4+1}{16}}$

☞ $I_2 = \displaystyle\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$

$$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-2x} & v(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$; on peut donc faire une intégration par parties :

On a alors $I_2 = \left[-\dfrac{1}{2}x \times e^{-2x}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -\dfrac{1}{2}e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

Soit $I_2 = \left[-\dfrac{1}{2}x \times e^{-2x}\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{2}e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

$I_2 = \left[-\dfrac{1}{2}x \times e^{-2x} - \dfrac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1$

$I_2 = -\dfrac{1}{2}e^{-2} - \dfrac{1}{4}e^{-2} - [0 - \dfrac{1}{4}]$ soit $\boxed{I_2 = \dfrac{1-3e^{-2}}{4}}$

☞ $I_3 = \displaystyle\int_0^1 (x-2)^2 e^{2x}\,dx = \int_0^1 (x^2-4x+4)e^{2x}\,dx$

$$\begin{cases} u(x) = x^2-4x+4 & u'(x) = 2x-4 \\ v'(x) = e^{2x} & v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0;1]$; on peut donc faire une intégration par parties :

On a alors $I_3 = [\dfrac{1}{2}(x^2-4x+4) \times e^{2x}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{2}(2x-4)e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Soit $I_3 = [\dfrac{1}{2}(x^2-4x+4) \times e^{2x}]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 (2-x)e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{cases} u(x) = 2-x & u'(x) = -1 \\ v'(x) = e^{2x} & v(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$I_3 = [\dfrac{1}{2}(x^2-4x+4) \times e^{2x}]_0^1 + [\dfrac{1}{2}(2-x)e^{2x}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -\dfrac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

$I_3 == [\dfrac{1}{2}(x^2-4x+4) \times e^{2x} + \dfrac{1}{2}(2-x)e^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{2x}]_0^1$.

$I_3 == [\dfrac{1}{4}(2x^2-8x+8) \times e^{2x} + \dfrac{1}{4}(4-2x)e^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{2x}]_0^1$.

$I_3 == [\dfrac{1}{4}(2x^2-10x+13) \times e^{2x}]_0^1 = \dfrac{5}{4} \times e^2 - \dfrac{13}{4}$ soit

$$\boxed{I_3 = \frac{5e^2 - 13}{4}.}$$

Exercice 3 — 2 points

2 pts Démontrer l'encadrement suivant

$$1 \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x \leq 5$$

Pour tout réel x de $[1;2]$:

	$1^4 \leq x^4 \leq 2^4$	car $x \mapsto x^4$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
	$2 \leq 1+x^4 \leq 17$	en ajoutant 1 de part et d'autre
	$\sqrt{2} \leq \sqrt{1+x^4} \leq \sqrt{17}$	car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$
	$\int_1^2 \sqrt{2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^2 \sqrt{17}\,\mathrm{d}x$	d'après la propriété sur intégrales et inégalités (1<2)
	$1 \leq \sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{17} \leq 5$	

Exercice 4 — 5,5 points

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$J_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

2 pts **1** Démontrer que la suite (J_n) est décroissante. On forme $J_{n+1} - J_n$ et on étudie son signe.

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t} - t^n\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}(t-1)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On étudie alors le signe de la fonction sous l'intégrale :
Pour tout réel t de $[0;1]$; on a : $t^n \geq 0$, $\sqrt{1+t} \geq 0$ et $t-1 \leq 0$, en utilisant la règle des signes d'un produit on obtient : Pour tout réel t de $[0;1]$, $t^n\sqrt{1+t}(t-1) \leq 0$.
Comme $0 < 1$; avec la croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}(t-1)\,\mathrm{d}t &\leq \int_0^1 0\,\mathrm{d}t \\ \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}(t-1)\,\mathrm{d}t &\leq 0 \\ J_{n+1} - J_n &\leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi on a prouvé que la suite (J_n) est décroissante.

1 pt **2** Justifier que, pour tout t vérifiant $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a $0 \leqslant \sqrt{1+t} \leqslant \sqrt{2}$.

Pour tout réel $t \in [0;1]$

	$0 \leq t \leq 1$	
	$1 \leq t+1 \leq 2$	en ajoutant 1
	$0 \leq \sqrt{1} \leq \sqrt{t+1} \leq \sqrt{2}$	car $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur $[0;+\infty[$
	$0 \leq \sqrt{t+1} \leq \sqrt{2}$	

2 pts **3** En déduire que $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$.

Pour tout réel $t \in [0;1]$

$$\begin{array}{ll}
0 \leq \sqrt{t+1} \leq \sqrt{2} & \\
0 \leq t^n\sqrt{t+1} \leq \sqrt{2}t^n & \text{en multipliant par } t^n \geq 0 \text{ sur } [0;1] \\
\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\sqrt{t+1}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \sqrt{2}t^n\mathrm{d}t & \text{en intégrant de 0 à 1 avec } 0<1 \\
0 \leq J_n \leq \sqrt{2}\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 & \\
0 \leq J_n \leq \sqrt{2}\left(\dfrac{1^{n+1}}{n+1} - 0\right) & \\
0 \leq J_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} &
\end{array}$$

0.5 pt **4** Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

$$\text{Ayant} \left.\begin{array}{l} 0 \leq J_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} = 0 \end{array}\right\} \text{le théorème des gendarmes permet de conclure : } \lim_{n\to+\infty} J_n = 0$$

Exercice 5

0 point

On considère les intégrales : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx$; $J == \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx$ et $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2x)dx$

1 Calculer $I+J$

$I+J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2(x)dx$

soit $I+J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2(x)+\cos^2(x))dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$.

2 Démontrer que $I-J = -K$

$I-J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2(x)dx$

soit $I+J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2(x)-\cos^2(x))dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos^2(x)-\sin^2(x))dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2x)dx = -K$

En effet on sait que $\cos^2(x)-\sin^2(x) = \cos(2x)$

3 Montrer que la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2\sin(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x)$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto x^2\cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Pour établir que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$; il suffit de montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = f(x)$.
Or F est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme, et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\right)\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x)$$

$$F = ab + cd$$

$$\text{Ainsi } F' = a'b + b'a + c'd + d'c$$

$$\left\{\begin{array}{l} a(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \\ b(x) = \sin(2x) \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{l} a'(x) = x \\ b'(x) = 2\cos(2x) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} c(x) = \frac{1}{2}x \\ d(x) = \cos(2x) \end{array}\right. \text{ donc } \left\{\begin{array}{l} c'(x) = \frac{1}{2} \\ d'(x) = -2\sin(2x) \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= x\sin(2x) + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}\right)\times 2\cos(2x) + \tfrac{1}{2}\cos(2x) + (-2\sin(2x))\times\tfrac{1}{2}x \\
&= x\sin(2x) + \tfrac{1}{2}x^2 \times 2\cos(2x) - \tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{2}\cos(2x) - x\sin(2x) \\
&= x^2\cos(2x)
\end{aligned}$$

4 Démontrer que $K = -\dfrac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2x)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F'(x)dx \\
&= [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - F(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= \left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right)\sin(2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cos(2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)) \\
&= \left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right)\sin(\pi) + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cos(\pi) \\
&= \tfrac{\pi}{4}\times(-1) \\
&= -\tfrac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$F(0) = 0$$

$$K = -\frac{\pi}{4}$$

5 Déduire des questions précédentes la valeur exacte de I.

Comme $I + J = \dfrac{\pi^3}{24}, I - J = \dfrac{\pi}{4}$

on a en ajoutant les deux équations : $2I = \dfrac{\pi^3}{24} + \dfrac{\pi}{4}$ soit $\boxed{I = \dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8}}$