Nom :	DS 01	TMATHS OISELET — Devoir n° 02	Sept. 2022
Prénom :	CASE DES MATHS		.../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 6 points

6 pts Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = e^{-x+7} \times e^{-4x+6} \qquad B = e^{(x+1)^2} \times e \qquad C = \left(e^{x+1}\right)^2 \times e$$

$$D = \frac{e^{3x-4}}{e^{-3x+4}} \qquad E = \qquad F =$$

$$B == e^{x^2+2x+1} \times e^1$$

$$C = \left(e^{x+1}\right)^2 \times e = e^{2(x+1)} \times e^1 = e^{2x+2+1}$$

$A = e^{-x+7} \times e^{-4x+6}$	$B = e^{(x+1)^2} \times e$	$C = \left(e^{x+1}\right)^2 \times e$
$= e^{-x+7-4x+6}$	$= e^{x^2+2x+1+1}$	$= e^{2(x+1)} \times e^1$
$= e^{-5x+13}$	$= e^{x^2+2x+2}$	$= e^{2x+3}$
$D = \dfrac{e^{3x-4}}{e^{-3x+4}}$	$E = e^{-5} \times e^{-3x+4} \times e^2$	$F = \left(e^{-3}\right)^2 \times e^{2x+2} \times \dfrac{1}{e^4}$
$= e^{3x-4-(-3x+4)}$	$= e^{-5-3x+4+2}$	$= e^{-6+2x+2-4}$
$= e^{6x-8}$	$= e^{-3x+1}$	$= e^{2x-8}$

$$A = e^{-5x+13} \qquad B = e^{x^2+2x+2} \qquad C = e^{2x+3}$$
$$D = e^{6x-8} \qquad E = e^{-3x+1} \qquad F = e^{2x-8}$$

Exercice 2 : Equations et Inéquations — 5 points

5 pts Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1 $\mathrm{e}^{3x-1} = \mathrm{e}^4$

On utilise la propriété $e^a = e^b \iff a = b$.

$$\mathrm{e}^{3x-1} = \mathrm{e}^4 \iff 3x - 1 = 4 \iff 3x = 5 \iff x = \frac{5}{3}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{5}{3}\right\}}$$

2 $(\mathrm{e}^x-1)(x+4)=0$.
On est ici en présence d'un équation produit :

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x-1)(x+4)=0 &\iff e^x-1=0 \text{ ou } (x+4)=0\\ &\iff e^x=1 \text{ ou } x=-4\\ &\iff e^x=e^0 \text{ ou } x=-4\\ &\iff x=0 \text{ ou } x=-4\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{0;-4\}}$$

3 $(2\mathrm{e}^x+14)(x-3)\leq 0$.
On étudie le signe de chaque facteur du produit et n fait le bilan dans un tableau de signes :

- ✍ Pour tout réel x on a $e^x>0$, donc $2e^x>0$, puis $2e^x+14>14>0$.
  Ainsi pour tout réel x; $2e^x+14$ est strictement positif.
- ✍ $x-3>0 \iff x>3$
- ✍ On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $(2e^x+14)$		+		+	
signe de $x-3$		-	0	+	
signe de $f(x)$		-	0	+	

On lit l'ensemble des solutions sur le tableau précédent :

$$\boxed{\mathcal{S}=]-\infty;3]}$$

Exercice 3 — *5 points*

5 pts Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

1 $f(x)=5x^2+3x+1-2e^x$

$$\boxed{f'(x)=10x+3-2e^x}$$

2 $g(x)=(2x+1)e^x$ g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$g=uv$, d'où $g'=u'v+v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= 2x+1\\ v(x) &= e^x\end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2\\ v'(x) &= e^x\end{cases}$

$$\begin{aligned}g'(x) &= 2e^x+(2x+1)e^x\\ &= (2+2x+1)e^x\end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x)=(2x+3)e^x}$$

3 $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$ h est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$h = \dfrac{u}{v}$ d'où $h' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) & = e^x - 1 \\ v(x) & = 2e^x + 1 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) & = e^x \\ v'(x) & = 2e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{e^x(2e^x+1) - 2e^x(e^x-1))}{(2e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(2e^x+1-2(e^x-1))}{(2e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(2e^x+1-2e^x+2)}{(2e^x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{3e^x}{(2e^x+1)^2}}$$

Exercice 4 — *10 points*

10 pts Soit la fonction g, définie sur tous les réels par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

1 Déterminer les variations de g.

✍ Dérivée : $g'(x) = e^x - 1$

✍ Signe de la dérivée :

$$\begin{array}{ll|ll|} g'(x) = 0 & \Longleftrightarrow e^x = 1 & g'(x) > 0 & \Longleftrightarrow e^x > 1 \\ & \Longleftrightarrow e^x = e^0 & & \Longleftrightarrow e^x > e^0 \\ & \Longleftrightarrow x = 0 & & \Longleftrightarrow x > 0 \end{array}$$

✍ On déduit le tableau de variations de g sur $]-\infty; +\infty[$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	2	$\nearrow$	

$$g(0) = 1 + e^0 = 2$$

2 Déterminer l'extremum local de g, en déduire le signe de $g(x)$.
D'après l'étude des variations, on déduit que g présente un minimum absolu en 0 qui vaut 2, ce qui permet d'affirmer que pour tout réel x, on a $g(x) \geqslant 2 > 0$.
On définit maintenant la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$$

Laisser toutes les traces de recherches apparentes. On pourra se servir de la forme donnée pour $f'(x)$ pour la question suivante.

3 Démontrer que pour tout réel x, on a $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
Calculons $f'(x)$:

f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f = w + \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = w' + \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x : $\begin{cases} u(x) &= x \\ v(x) &= e^x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= e^x \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1 \times e^x - e^x \times x}{e^{2x}} \\ &= 1 + \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} \\ &= 1 + (1-x)e^{x-2x} \\ &= 1 + (1-x)e^{-x} \\ &= e^{-x}\left(\frac{1}{e^{-x}} + 1 - x\right) \\ &= e^{-x}(e^x + 1 - x) \\ &= e^{-x}g(x) \end{aligned}$$

4 Déduire de la question 3 les variations de f.

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
signe de e^{-x}	$+$
signe de $g(x)$	$+$
signe de $f'(x)$	$+$

On déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
Variations de f	$\nearrow$

5 Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ (courbe représentative de f dans un repère orthonormé) au point d'abscisse 0. T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

- ✏ $f'(0) = e^0 \times g(0) = 2$
- ✏ $f(0) = 1$

$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 2(x-0)+1, \text{ soit } y = 2x+1}$

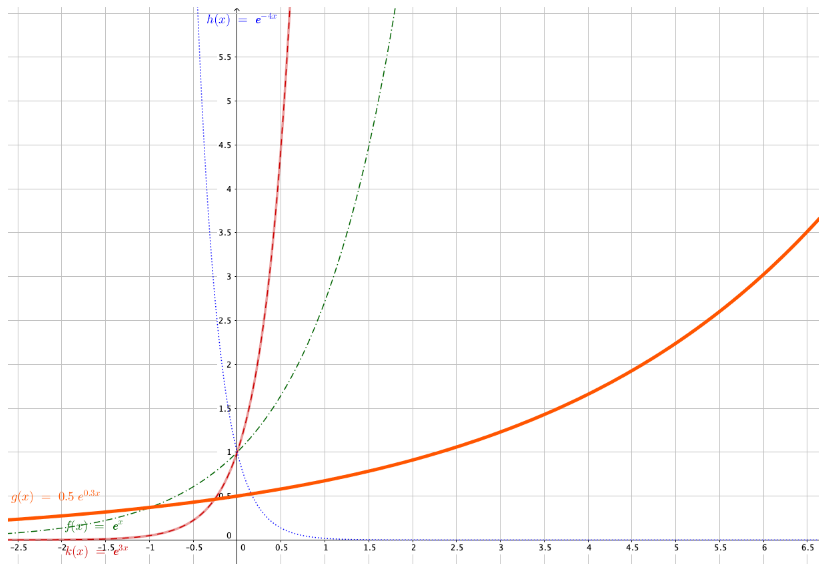
Exercice 5 — 4 points

4 pts

Associer chaque fonction à sa courbe représentative en justifiant :

$$f(x) = e^x, g(x) = 0,5e^{0,3x}, h(x) = e^{-4x}, k(x) = e^{3x}$$

- ✍ $g(0) = 0,5$, donc C_g passe par le point $A(0;0,5)$.On déduit la courbe de g.
- ✍ $h(x) = e^{-4x}$, donc $h'(x) = -4e^{-4x}$. Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $h'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On déduit donc la courbe de h.
- ✍ $f(1) = e^1 = e \approx 2,72$, ce qui permet de déduire la courbe de f, puis celle de k.



Exercice 6 — 10 points

10 pts

On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^{-2x}$ avec a et b deux réels.

1 Calculer $f'(x)$.
f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\begin{cases} u(x) &= ax+b \\ v(x) &= e^{-2x} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= a \\ v'(x) &= -2e^{-2x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{-2x} - 2(ax+b)e^{-2x} \\ &= (-2ax + a - 2b)e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-2ax + a - 2b)e^{-2x}}$$

2 Trouver a et b sachant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\iff (a\times 0 + b)e^0 = 1 \\ &\iff b = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) = 3 &\iff (-2a\times 0 + a - 2b)e^0 = 3 \\ &\iff a - 2b = 3 \\ &\iff a = 3 + 2b = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = (5x+1)e^{-2x}}$$

3 Etudier les variations de f.

✍ Dérivée : $f'(x) = (-2ax + a - 2b)e^{-2x} = (-10x+3)e^{-2x}$

✍ Signe de la dérivée : la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on déduit que $f'(x)$ a le signe de $(-10x+3)$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -10x+3 = 0 \\ &\iff -10x = -3 \\ &\iff x = \frac{3}{10} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -10x+3 > 0 \\ &\iff -10x > -3 \\ &\iff x < \frac{3}{10} \end{aligned}$$

✍ On déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$\frac{3}{10}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{5}}$	$\searrow$	

4 Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, au point d'abscisse 0.
T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

✂ $f'(0) = 3$

✂ $f(0) = 1$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 3(x-0)+1, \text{ soit } y = 3x+1}$$

Exercice 7 — 4 points

4 pts On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x} - 2x$

1 Déterminer les coordonnées des points de $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f, qui ont une tangente parallèle à la droite Δ d'équation $y = x$.

✍ La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$au point d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$

✍ La droite Δ d'équation $y = x$ a pour coefficient directeur 1.

✍ Deux droites sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur : $T /\!/ \Delta \iff f'(x) = 1$

$$f'(x) = -3e^{3x} - 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 &\iff 3e^{3x} - 2 = 1 \\ &\iff e^{3x} = 1 \\ &\iff e^{3x} = e^0 \\ &\iff 3x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Un seul point de } \mathscr{C}_f \text{ a sa tangente parallèle à la droite } \Delta\text{, c'est le point } A(0,1).}$$

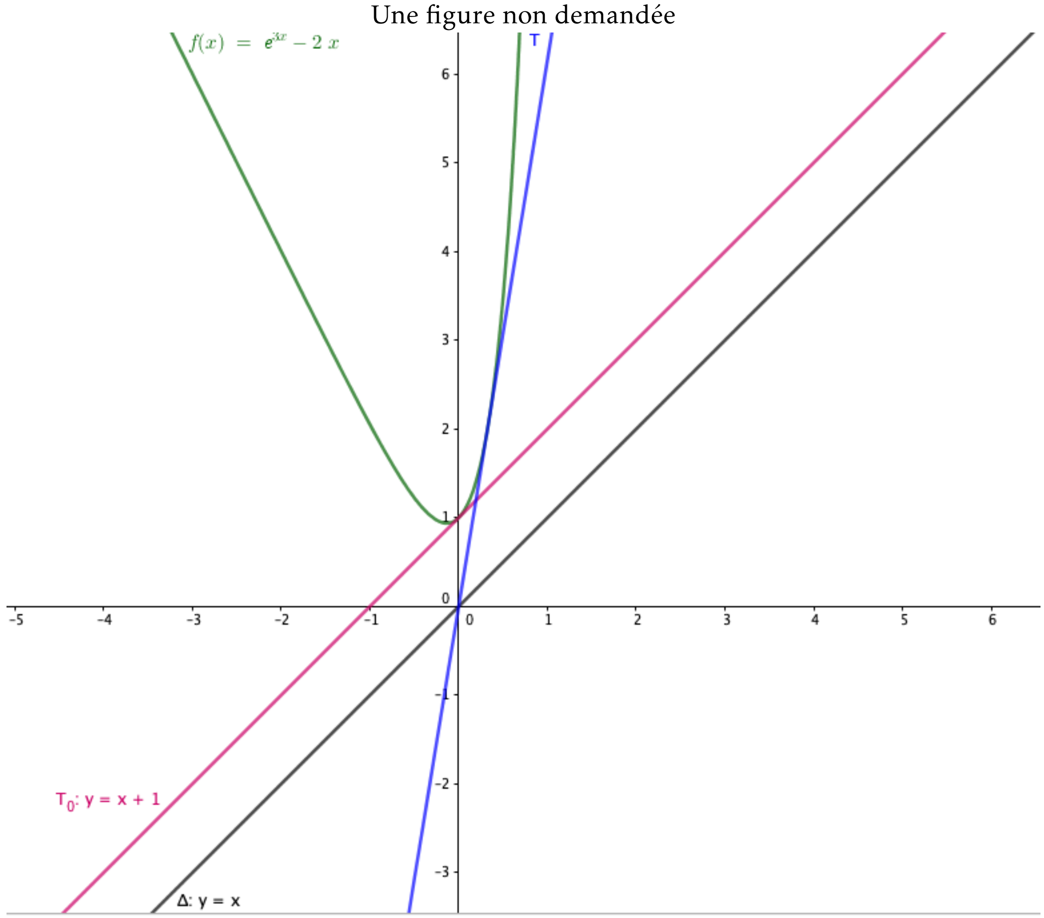
2 Déterminer l'abscisse des points de $\mathscr{C}_f$ dont la tangente T passe par le point $O(0;0)$.
La tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$y = (3e^{3a} - 2)(x-a) + e^{3a} - 2a$$

$$\begin{aligned} O(0;0) \in T_a \quad &\Longleftrightarrow 0 = (3e^{3a} - 2)(0-a) + e^{3a} - 2a \\ &\Longleftrightarrow -3ae^{3a} + 2a + e^{3a} - 2a = 0 \\ &\Longleftrightarrow (-3a+1)e^{3a} = 0 \\ &\Longleftrightarrow -3a+1 = 0 \text{ La fonction exponentielle ne s'annule pas} \\ &\Longleftrightarrow a = -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Un seul point de $\mathscr{C}_f$ a sa tangente passant par le point $O(0,0)$, c'est le point d'abscisse $-\frac{1}{3}$.

Une figure non demandée



Exercice 8 Bonus **3 points**

3 pts On appelle cosinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{ch} \;:\; x \mapsto \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sinus hyperbolique la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{sh} \;:\; x \mapsto \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1 Montrez que $\operatorname{ch}(2x) = 2\operatorname{ch}^2(x) - 1$.

$$\begin{aligned}
2\operatorname{ch}^2(x) - 1 \quad &= 2\left(\tfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - 1\\
&= 2\left(\frac{e^{2x} + 2e^x \times e^{-x} + e^{-2x}}{4}\right) - 1\\
&= \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - 2}{2}\\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x)
\end{aligned}$$

2 Montrez que $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)$

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) \quad &= 2\tfrac{e^x-e^{-x}}{2} \times \tfrac{e^x+e^{-x}}{2}\\
&= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2}\\
&= \frac{\left((e^x)^2 - (e^{-x})^2\right)}{2}\\
&= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh}(2x)
\end{aligned}$$