Nom, Prénom : …………………………………………………… **Lundi 28 Février 2022**

Term Spé DEVOIR SURVEILLE N°6 (2h)

/ 40

Exercice 1: QCM *(6 points)*

On considère le plan (P) d'équation cartésienne $3x + 2y + 9z - 5 = 0$

et la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 9 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

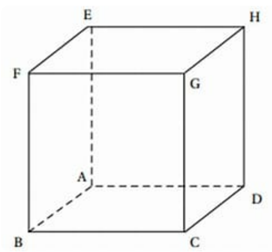
L'intersection du plan (P) et de la droite (d) est réduite au point de coordonnées (3 ; 2 ; 9)	Le plan (P) et la droite (d) sont orthogonaux.	Le plan (P) et la droite (d) sont parallèles.	L'intersection du plan (P) et de la droite (d) est réduite au point de coordonnées (– 353 ; 91 ; 98)

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2 \\ z = 5t - 6 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

et le point A (– 2 ; 1 ; 0). Soit M un point variable de la droite (d).

La plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.	La plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$.	La plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées (– 2 ; 1 ; 0).	La plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées (2 ; 2 ; – 6).

Soit ABCDEFGH un cube de côté 1.

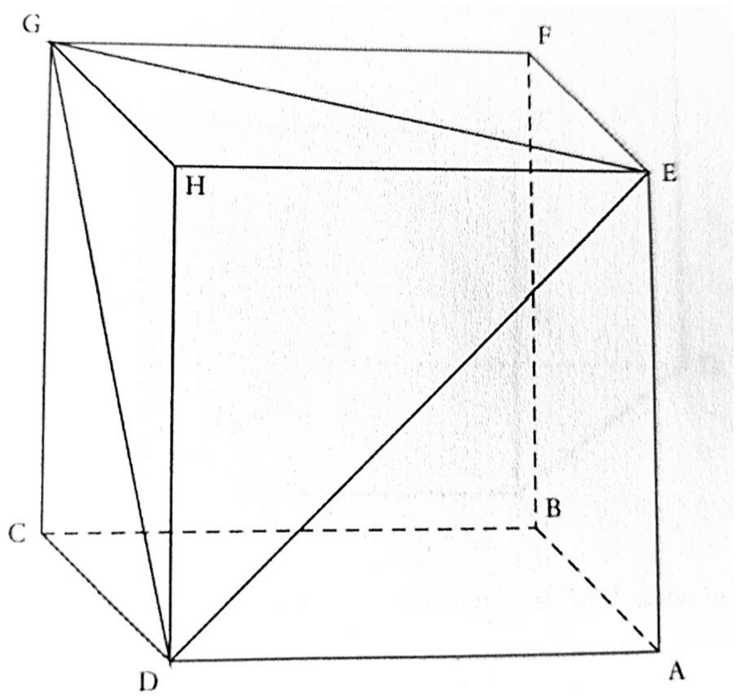


$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = -1$	$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$	$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = 2$	$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = 1$

Exercice 2: *(18,5 points)*

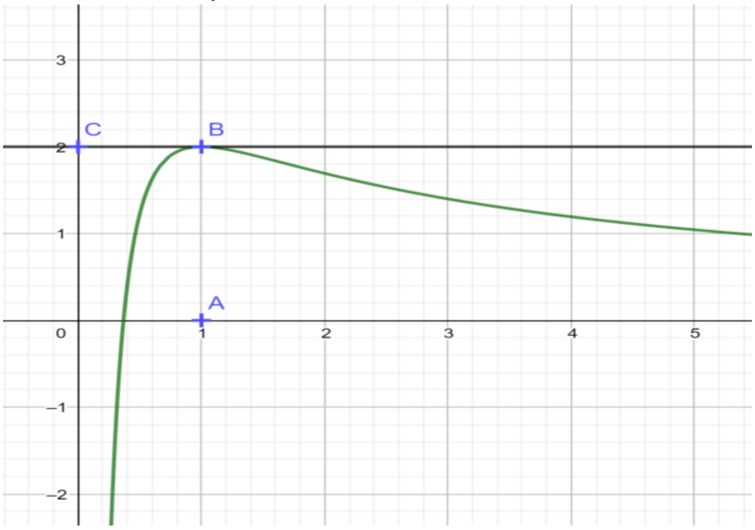
ABCDEFGH est un cube de côté 1.
L'espace est rapporté au repère (B , $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$).

1) Déterminer les coordonnées des sommets du cube.
2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).
3) Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).
4) Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
5) On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
   Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.
6) Que représente le point P pour le triangle DEG ? Justifier la réponse.
7) On considère le point L(1 ; $\frac{1}{2}$; 1).
   a) Placer le point L sur la figure ci-dessous.
   b) Déterminer la distance entre le point L et la droite (BH).
8) a) Placer sur la figure les points suivants : R ($\frac{2}{3}$; 0 ; 1) et S (0 ; $\frac{2}{3}$; 0).
   b) Tracer l'intersection du cube avec le plan (LRS). On laissera les traits de construction sur la figure.



Exercice 3: *(15,5 points)*

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) , la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]\, 0 \,;\, +\infty\, [$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B et C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0) , (1 ; 2) et (0 ; 2).
- la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}_f$ en B.
- il existe deux réels positifs a et b tels que, pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{a + b\ln(x)}{x}$.

1) a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f\,'(1)$.

   b) Vérifier que, pour tout réel strictement positif x, $f\,'(x) = \dfrac{(b - a) - b\ln(x)}{x^2}$.

   c) En déduire les valeurs de a et de b .

2) a) Justifier que, pour tout réel strictement positif x, $f\,'(x)$ a le même signe que $-\ln(x)$.

   b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   (on pourra remarquer que, pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{\ln(x)}{x}$).

   c) En déduire le tableau de variation de la fonction f .

3) a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]\, 0 \,;\, 1\,]$.

   b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β sur l'intervalle $]\, 1 \,;\, +\infty\, [$ tel que $f(\beta) = 1$.
   Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

4) On donne ci-contre le script d'une fonction Python.

   a) Que représentent les valeurs retournées par la fonction "calcul" ?

   b) Modifier la fonction "calcul" pour que l'appel "calcul()" retourne les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

```python
from math import log

def calcul():
    a=0 ; b=1
    while b-a > 0,1:
        m=(a+b)/2
        y=2/m + 2*log(m)/m
        if y < 1:
            a=m
        else:
            b=m
    return(a,b)
```

CORRECTION

Exercice 1: QCM *(6 points)*

On considère le plan (P) d'équation cartésienne $3x + 2y + 9z - 5 = 0$

et la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -t + 2 \\ z = -t + 9 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

On remplace x , y et z par leurs expressions en fonction de t dans l'équation cartésienne de (P).

On obtient comme solution t = – 89. Donc réponse 4.

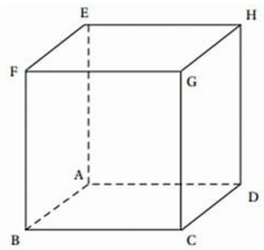
~~L'intersection du plan (P) et de la droite (d) est réduite au point de coordonnées (3 ; 2 ; 9)~~	~~Le plan (P) et la droite (d) sont orthogonaux.~~	~~Le plan (P) et la droite (d) sont parallèles.~~	L'intersection du plan (P) et de la droite (d) est réduite au point de coordonnées (– 353 ; 91 ; 98)

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2 \\ z = 5t - 6 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

et le point A (– 2 ; 1 ; 0). Soit M un point variable de la droite (d).
On cherche la distance minimale entre A et la droite (d). Cette distance sera minimale si M est le projeté orthogonal de A sur (d) donc si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ avec $\overrightarrow{u}$ vecteur directeur de (d).
$\overrightarrow{u}$ (1 ; 0 ; 5) et $\overrightarrow{AM}$ (t ; 1 ; 5t – 6). La solution de l'équation donne t = 1 et AM = $\sqrt{27}$. Réponse b.

~~La plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{53}$.~~	La plus petite longueur AM est égale à $\sqrt{27}$.	~~La plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées (– 2 ; 1 ; 0).~~	~~La plus petite longueur AM est atteinte lorsque le point M a pour coordonnées (2 ; 2 ; – 6).~~

Soit ABCDEFGH un cube de côté 1.



On choisit le repère (A , $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$). Dans ce repère A(0 ; 0 ; 0) ; B(1 ; 0 ; 0) ; F(1 ; 0 ; 1) et G(1 ; 1 ; 1)
$\overrightarrow{AF}$ (1 ; 0 ; 1) et $\overrightarrow{BG}$ (0 ; 1 ; 1) donc réponse d.

~~$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = -1$~~	~~$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$~~	~~$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = 2$~~	$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BG} = 1$

Exercice 2: *(18,5 points)*

ABCDEFGH est un cube de côté 1.
L'espace est rapporté au repère $(B , \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BF})$.

1) Déterminer les coordonnées des sommets du cube.

B(0 ; 0 ; 0) ; A(1 ; 0 ; 0) ; C(0 ; 1 ; 0) ; F(0 ; 0 ; 1) ; D(1 ; 1 ; 0) ; E(1 ; 0 ; 1) ; G(0 ; 1 ; 1) ; H(1 ; 1 ; 1)

2)

Le point H a pour coordonnées (1 ; 1 ; 1).

$$M \in (BH) \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BH} \iff \begin{cases} x-0 = t(1-0) \\ y-0 = t(1-0) \\ z-0 = t(1-0) \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Donc la droite (BH) a pour représentation paramétrique, $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

3)

On a D(1; 1; 0), E(1; 0; 1) et G(0; 1; 1).
D'où $\overrightarrow{DE}(0\,;\,-1\,;\,1)$, $\overrightarrow{DG}(-1\,;\,0\,;\,1)$.
Comme $\overrightarrow{BH}(1\,;\,1\,;\,1)$ ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{DE}$ et à $\overrightarrow{DG}$, soit à deux vecteurs non colinéaires du plan (DEG). Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ est donc normal au plan (DEG) : la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

4)

D'après la question précédente une équation du plan (DEG) est :
$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (DEG) \iff 1x+1y+1z+d=0.$
On a par exemple $D \in (DEG) \iff 1+1+0+d=0 \iff d=-2.$
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (DEG) \iff x+y+z-2=0.$

5)

les coordonnées de P vérifient l'équation paramétrique de la droite (Bh) et l'équation du plan (DEG) soit :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x+y+z-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3t-2=0 \iff t=\frac{2}{3}.$$

On a donc $P\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$.

6)

On a :

$$PD^2 = \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{2}{3}\right)^2;$$

$$PE^2 = \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2;$$

$$PG^2 = \left(0-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{2}{3}\right)^2.$$

On a donc de façon évidente $PD^2 = PE^2 = PG^2 = \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, soit PD = PE = PG.

Le point P est donc équidistant des trois sommets du triangle (DEG), c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle (DEG), mais comme celui-ci est équilatéral car ses trois côtés sont des diagonales de carrés de côté 1, le point P est orthocentre, centre du cercle circonscrit et centre de gravité du triangle équilatéral (DEG).

7) On considère le point L(1 ; $\frac{1}{2}$; 1).

a) Placer le point L sur la figure ci-dessous.

b) Déterminer la distance entre le point L et la droite (BH).

Pour déterminer la distance entre le point L et la droite (BH), il faut déterminer le projeté orthogonal de L sur (BH). Posons K ce projeté.

K $\in$ (BH) donc $x_K = y_K = z_K = x$. $\overrightarrow{BH}$ (1 ; 1 ; 1) et $\overrightarrow{LK}$ ($x-1$; $x-\frac{1}{2}$; $x-1$)

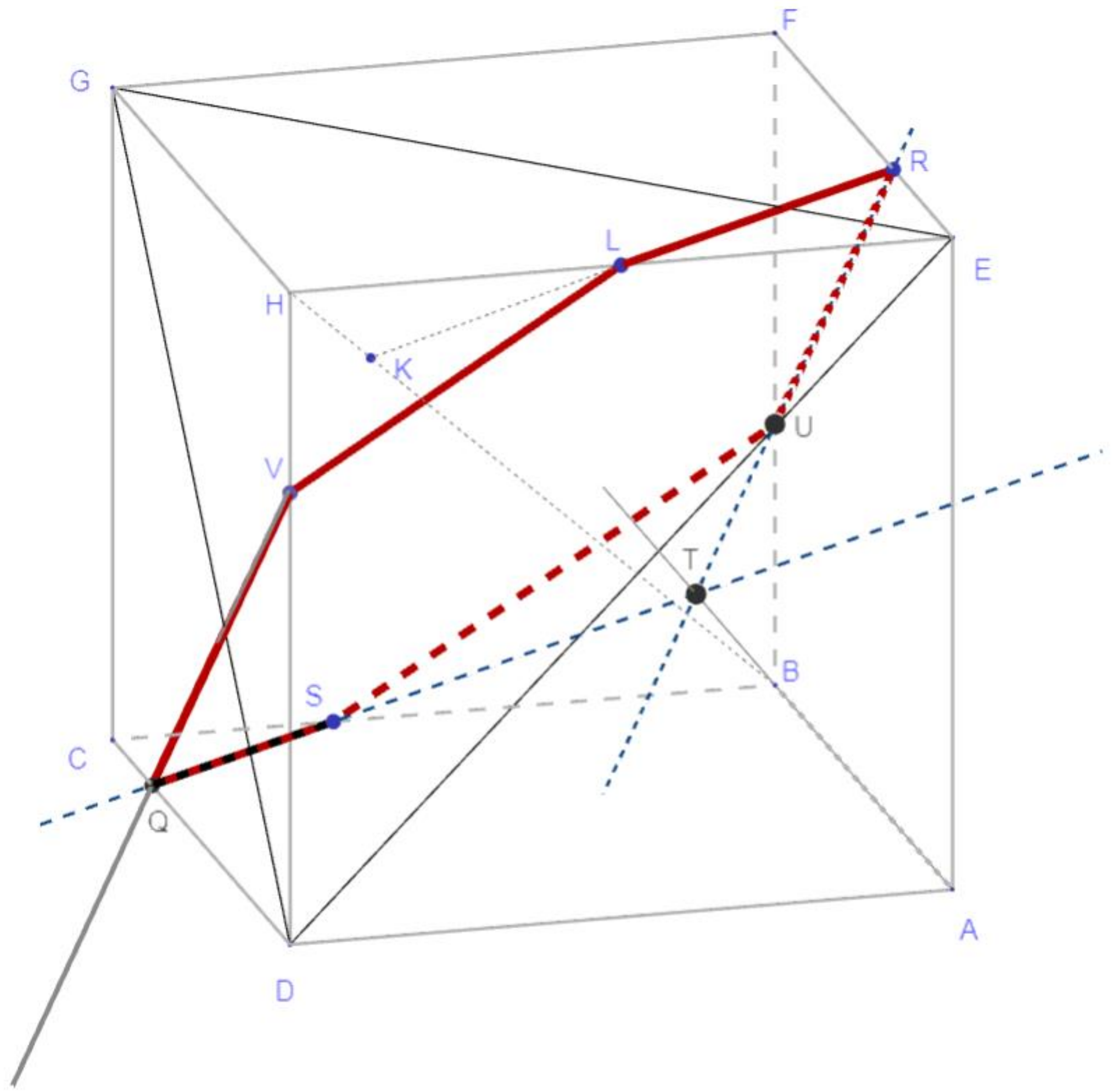
$\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{BH} = x-1+x-\frac{1}{2}+x-1 = 3x-\frac{5}{2}$

$\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow 3x-\frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$ donc K ($\frac{5}{6}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{6}$) donc $\overrightarrow{LK}$ ($-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{6}$)

donc LK $= \sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. La distance entre le point L et la droite (BH) vaut $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

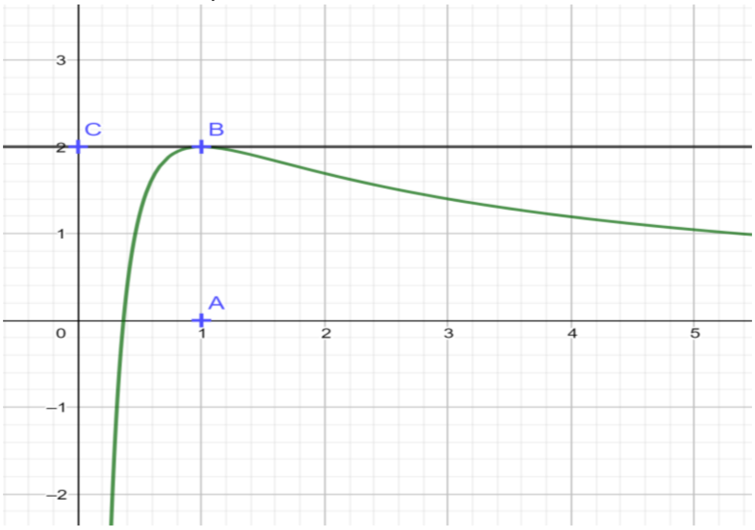
8) a) Placer sur la figure les points suivants : R ($\frac{2}{3}$; 0 ; 1) et S (0 ; $\frac{2}{3}$; 0).

b) Tracer l'intersection du cube avec le plan (LRS). On laissera les traits de construction sur la figure.



Exercice 3: *(15,5 points)*

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) , la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur] 0 ; + ∞ [.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B et C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0) , (1 ; 2) et (0 ; 2).
- la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}_f$ en B.
- il existe deux réels positifs a et b tels que, pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{a + b\ln(x)}{x}$.

1. **a.** On lit $f(1) = y_B = 2$ et pour $f'(1)$, on lit le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1, c'est à dire le coefficient directeur de la droite (CB), qui est horizontale, donc $f'(1) = 0$.

   b. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle (le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle).
   On a :
   $$f'(x) = \frac{\left(0 + b \times \frac{1}{x}\right) \times x - (a + b\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{b - (a + b\ln x)}{x^2}$$
   Soit effectivement : $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.

   c. On en déduit : $f(1) = \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = a + 0 = a$, or d'après le **1. a.**, $f(1) = 2$, donc $a = 2$.
   Dès lors, on a $f'(1) = \dfrac{(b-2) - b\ln(1)}{1^2} = b - 2$, or d'après le **1. a.**, $f'(1) = 0$, donc $b = 2$.

2. **a.** On reprend la forme de f' obtenue précédemment, en remplaçant a et b par 2, et on a :
   $f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x^2} = \dfrac{2}{x^2} \times (-\ln x)$.
   Puisque pour tout x élément de $]0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{2}{x^2}$ est un nombre strictement positif, on en déduit que la dérivée de f a bien le même signe que $-\ln x$ pour tout x élément de $]0\,;\,+\infty[$.

b. Quand x tend vers 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc, par limite d'un produit et d'une somme : $\lim\limits_{x\to 0} 2+2\ln x = -\infty$. Comme par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} x = 0^+$, alors, par limite d'un quotient, on a $\lim\limits_{0} f = -\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, on va utiliser la forme de f présentée dans la question : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, d'après la propriété des croissances comparées, et donc par limite d'une somme, puis par produit par 2 : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

c. On peut donc dresser le tableau des variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3. a. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ et 1 est une valeur strictement comprise entre $\lim\limits_{0} f$ et $f(1)$, donc l'application du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une unique solution à l'équation
$f(x) = 1$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, qui sera notée α.

b. Par balayage à la calculatrice, on obtient $f(5) > 1$ et $f(6) < 1$, donc comme la fonction f est continue sur $[5\,;\,6]$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[5\,;\,6]$, et puisque l'on avait admis qu'il n'y avait qu'une seule solution β à cette équation sur $]1\,;\,+\infty[$, cette solution est donc entre 5 et 6. Enfin, puisque ni 5 ni 6 n'ont une image exactement égale à 1, on peut dire que β est strictement entre 5 et 6. Le nombre entier n cherché est donc 5.

4) On donne ci-contre le script d'une fonction Python.

```python
from math import log

def calcul():
    a=0 ; b=1
    while b-a > 0,1:
        m=(a+b)/2
        y=2/m + 2*log(m)/m
        if y < 1:
            a=m
        else:
            b=m
    return(a,b)
```

a) Que représentent les valeurs retournées par la fonction "calcul" ?

Cet algorithme est un algorithme de dichototomie.
a et b sont les valeurs qui encadrent la solution α à 0,1 près.

b) Modifier la fonction "calcul" pour que l'appel "calcul()" retourne les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

Il suffit de modifier les valeurs de a et b.
a = 5 ; b = 6
et la valeur du test **if y < 6**