Nom :	DS 07	TMATHS — Mars 2022
Prénom :		Devoir n° 07 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 9,5 points

9.5 pts Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 - 5x + 4$.
2. $f(x) = \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{x^2}$
3. $f(x) = 8x(x^2+1)^4$
4. $f(x) = \dfrac{5}{2x+1}$
5. $f(x) = e^{3x}$
6. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x+5}}$

Exercice 2 — 8 points

8 pts

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}.$$

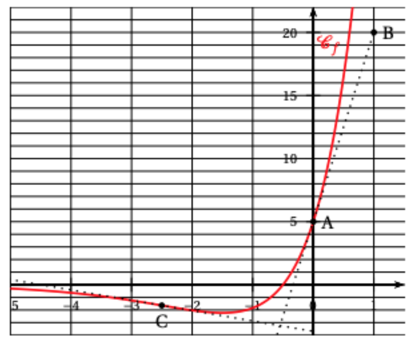
1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E′) : $y' - 2y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E′).
3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E′).
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 1$.

Exercice 3 **10 points**

10 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera f' la fonction dérivée de f.
On donne les points A de coordonnées $(0;\ 5)$ et B de coordonnées $(1\ ;\ 20)$. Le point C est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse $-2,5$. La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

Les questions 1 à 3 se rapportent à cette même fonction f.



1 On peut affirmer que :

a. $f'(-0,5) = 0$

b. si $x \in]-\infty\ ;\ -0,5[$, alors $f'(x) < 0$

c. $f'(0) = 15$

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

2 On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5\ ;\ 0)$.
On peut affirmer que :

a. $a = 10$ et $b = 5$

b. $a = 2,5$ et $b = -0,5$

c. $a = -1,5$ et $b = 5$

d. $a = 0$ et $b = 5$

3 On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = (10x+25)\mathrm{e}^x.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

b. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$

c. Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$

d. $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

4 On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (U_n) converge

b. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$

c. la suite (U_n) diverge

d. la suite (U_n) est majorée

Les questions 5 à 7 se rapportent à la fonction f définie sur $]0;3]$ par $f(x) = x^2(1-\ln x)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère.

5 Sur l'intervalle $[1;3]$:

a. La fonction f est convexe.

b. La fonction f' estpositive.

c. La fonction f' est décroissante.

d. La fonction f est décroissante.

6 Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse e s'écrit :

a. $y = -x + e$.

b. $y = -ex$

c. $y = -ex + e^2$

d. $y = ex$

7 $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse est :

a. 1.

b. e

c. $\dfrac{1}{e}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

8 f, g, h, i sont 4 fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2(3\ln x + 1)$$

$$g(x) = x^3 \ln x$$

$$h(x) = 3x^2(3\ln x + 1)$$

$$i(x) = x^3(\ln x + 1)$$

a. f est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

b. i est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

c. g est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

d. g est une primitive de h sur $]0;+\infty[$.

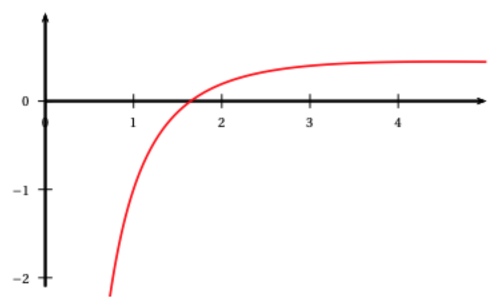
Exercice 4 — 13,5 points

13.5 pts

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
   On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Nom :	**DS 07**	TMATHS *Mars 2022*
Prénom :		*Devoir n° 07* .../...

Feuille de réponses de l'exercice 3 :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7	Question 8
Réponse								