Nom :	**DS 07**	TMATHS Mars 2022
Prénom :		Devoir n° 07 ..../...

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises**.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *9,5 points*

9.5 pts Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1 $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

Une primitive de la fonction f est la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5}{2}x^2 + 4x$

2 $f(x) = \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

On a $f(x) = 5 \times \dfrac{1}{x} 2 - \times \dfrac{1}{x^2}$

Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = 5\ln x - 2 \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 5\ln x + \dfrac{2}{x}$

3 $f(x) = 8x(x^2+1)^4$

On pose $u = x^2 + 1$ alors $u' = 2x$.

On a alors $f = 4u'u^4$, donc $F = 4\dfrac{u^{4+1}}{4+1} = \dfrac{4}{5}u^5$

Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{4}{5}(x^2+1)^5$

4 $f(x) = \dfrac{5}{2x+1}$

On peut écrire $f(x) = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{2}{2x+1}$

On pose $u = 2x+1$ alors $u' = 2$.

On a alors $f = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{u'}{u}$, donc $F = \dfrac{5}{2}\ln|u|$

Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $F(x) = \dfrac{5}{2}\ln|2x+1|$

5 $f(x) = e^{3x}$

On peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{3} \times 3e^{3x}$

On pose $u = 3x$ alors $u' = 3$.

On a alors $f = \dfrac{1}{3} \times u'e^u$, donc $F = \dfrac{1}{3}e^u$

Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{1}{3}e^{3x}$

6 $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x+5}}$

On peut écrire $f(x) = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{2x+5}}$

On pose $u = 2x+5$ alors $u' = 2$.

On a alors $f = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, donc $F = \dfrac{3}{2} \times 2\sqrt{u} = 3\sqrt{u}$

$$\boxed{\text{Une primitive de la fonction } f \text{ est la fonction } F \text{ définie sur } \left]-\frac{5}{2};+\infty\right[\text{ par } F(x) = 3\sqrt{2x+5}}$$

Exercice 2 — 15 points

8 pts On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}.$$

1.5 pt **1** Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$u = ab$ où $a(x) = x$ et $b(x) = e^{2x}$

ainsi $a'(x) = 1$ et $b'(x) = 2e^{2x}$

$$u'(x) = 1 \times e^{2x} + (2e^{2x}) \times x = (1+2x)e^{2x}$$

On forme alors $u'(x) - 2u(x) = (1+2x)e^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}$

$$\boxed{\text{ayant } \forall x \in \mathbb{R}, u'(x) - 2u(x) = e^{2x},\ u \text{ est une solution de l'équation différentielle } (E).}$$

1.5 pt **2** On considère l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

$y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$.

(E') est du type $y' = ay$; les solutions de (E') sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{y = Ce^{2x} \text{ où } C \text{ désigne une constante réelle quelconque.}}$$

1 pt **3** Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

Soit v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E').

On sait que u est une solution particulière de l'équation (E) ;

on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}; u'(x) - 2u(x) = e^{2x}$ ou encore

$\forall x \in \mathbb{R}; e^{2x} = u'(x) - 2u(x)$

D'où la chaîne d'équivalence :

$$\begin{aligned}
v \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v'(x) - 2v(x) = e^{2x} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; u'(x) - 2u(x) = v'(x) - 2v(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v'(x) - u'(x) = -2v(x) + 2u(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (v-u)'(x) - 2(v-u)(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (v-u)' - 2(v-u) = 0 \\
&\Leftrightarrow (v-u) \text{ est solution de} (E')
\end{aligned}$$

1.5 pt **4** En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

$$\begin{aligned} v \text{ est solution de}(E) &\Leftrightarrow (v-u) \text{ est solution de}(E') \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (v-u)(x) = Ce^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v(x) - u(x) = Ce^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v(x) = u(x) + Ce^{2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v(x) = xe^{2x} + Ce^{2x} \end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par

$v(x) = (x+C)e^{2x}$ où C désigne une constante réelle arbitraire.

1.5 pt **5** Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 1$.
$g(0) = 1 \Leftrightarrow (C+0)e^0 = 1 \Leftrightarrow C = 1.$

Ainsi l'unique solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = 1$ est définie par

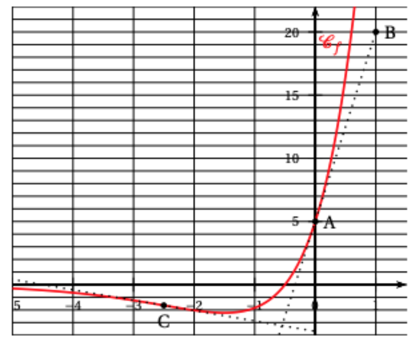
$$g(x) = (x+1)e^{2x}$$

Exercice 3 — 12 points

12 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera f' la fonction dérivée de f.
On donne les points A de coordonnées $(0\,;\,5)$ et B de coordonnées $(1\,;\,20)$. Le point C est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse $-2,5$. La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

Les questions 1 à 3 se rapportent à cette même fonction f.



1 On peut affirmer que :

a. $f'(-0,5) = 0$
Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $-0,5$ est manifestement positif — Faux

b. si $x \in]-\infty\,;\,-0,5[$, alors $f'(x) < 0$
Le nombre dérivé s'annule en à peu près en $x = -1,5$ — Faux

c. $f'(0) = 15$
Graphiquement $f'(0) = \dfrac{20-5}{1-0} = 15$ — Vrai

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$
f' est négative sur $]-\infty\,;\,-1,5[$ et positive sur $]-1,5\,;\,+\infty[$ — Faux

La bonne réponse est c.

2 On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5\,;\,0)$.
On peut affirmer que :

a. $a = 10$ et $b = 5$

b. $a = 2,5$ et $b = -0,5$

c. $a = -1,5$ et $b = 5$

d. $a = 0$ et $b = 5$

Graphiquement $f(0) = 5 \iff b\mathrm{e}^0 = 5 \iff b = 5$;
D'autre part f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(ax+a+b)$.
On a vu que $f'(0) = 15 \iff a+b = 15 \iff a+5 = 15 \iff a = 10$.

La bonne réponse est a.

3 On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = (10x+25)\mathrm{e}^x.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

b. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$

c. Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$

d. $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

$f''(x) = 0 \iff (10x+25)\mathrm{e}^x = 0 \iff 10x+25 = 0$ (car $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$) ; donc $f''(x) = 0 \iff x = -2,5$: C est donc l'unique point d'inflexion. En effet la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $x = -2,5$.

La bonne réponse est c.

4 On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (U_n) converge

b. pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$

c. la suite (U_n) diverge

d. la suite (U_n) est majorée

On sait, d'après le cours que toute suite convergente est bornée ; donc la suite (V_n) est majorée et donc il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n \leqslant M$.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leqslant V_n$; on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \leqslant M$ et donc que la suite (U_n) est majorée.

La bonne réponse est d.

Les questions 5 à 7 se rapportentà la fonction f définie sur $]0;3]$ par $f(x) = x^2(1-\ln x)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère.

5 Sur l'intervalle $[1;3]$:

a. La fonction f est convexe.

b. La fonction f' estpositive.

c. La fonction f' est décroissante.

d. La fonction f est décroissante.

En calculant les dérivées successives, on trouve $f'(x) = x(1-2\ln x)$ et $f''(x) = -2\ln x$.
La dérivée seconde est donc négative sur $[1;3]$. Ce qui prouve que la fonction f' est décroissante.

La bonne réponse est c.

6 Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse e s'écrit :

a. $y = -x + e$.

b. $y = -ex$

c. $y = -ex + e^2$

d. $y = ex$

T a pour équation $y = f'(e)(x-e) + f(e)$

✏ $f'(e) = e(1-2\ln e) = -e$

✏ $f(e) = e^2(1-\ln e) = 0$

T a pour équation $y = -e(x-e) + 0$, soit $y = -ex + e^2$

La bonne réponse est c.

7 $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse est :

a. 1.

b. e

c. $\dfrac{1}{e}$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

On a $f''(x) = -2\ln x - 1$. Le signe de $f''(x)$ est donnée par le tableau :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		3
signe de $f''(x)$		+	0	-	

La bonne réponse est d.

8 f, g, h, i sont 4 fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2(3\ln x + 1)$$

$$g(x) = x^3 \ln x$$

$$h(x) = 3x^2(3\ln x + 1)$$

$$i(x) = x^3(\ln x + 1)$$

a. f est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

b. i est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

c. g est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

d. g est une primitive de h sur $]0;+\infty[$.

En calculant la dérivée de g : g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. $g = uv$, d'où $g' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $]0;+\infty[$: $\begin{cases} u(x) &= x^3 \\ v(x) &= \ln x \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 3x^2 \\ v'(x) &= \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 \times (\ln x) + x^3 \times \frac{1}{x} \\ &= 3x^2 \ln x + x^2 \\ &= x^2(3\ln x + 1) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Comme $g'(x) = f(x)$, g est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

La bonne réponse est c.

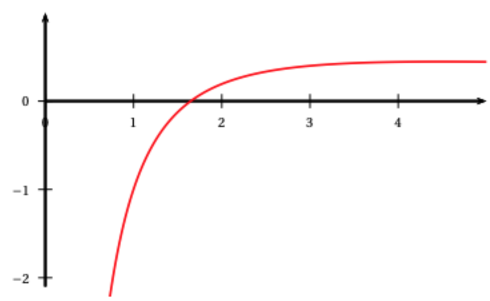
16.5 pts

Exercice 4 — 16,5 points

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1 Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième. Dans $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad f(x) = 0 \iff \dfrac{2\ln(x) - 1}{x} = 0$, on a donc

$2\ln(x) - 1 = 0 \iff 2\ln(x) = 1 \iff \ln(x) = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

$$\boxed{S = \left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right\}.}$$

Rem. $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}} \approx 1,649 \approx 1,65$ au centième près.

2 Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

- Sur $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $f(x) < 0$;
- Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$, on a $f(x) > 0$;
- $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 0$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1 **a.** Déterminer la limite de la fonction g en 0.
On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} (-\ln x) = +\infty$, donc par somme de limites :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty.}$$

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
$g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$. Comme
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$, on obtient par produit :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.}$$

2 On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.
La fonction $g(x) = \ln(x)[\ln(x) - 1]$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = \dfrac{1}{x} \times [\ln(x) - 1] + \ln(x) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}[\ln(x) - 1 + \ln(x)] = \dfrac{1}{x} \times (2\ln(x) - 1) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x} = f(x)$.

3 Le signe de $f(x) = g'(x)$ a été trouvé à la question 2 de la partie I ; on a donc :

- Sur $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $g'(x) < 0$: la fonction g est strictement décroissante sur cet intervalle
- Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$, on a $g'(x) > 0$: la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle
- $g'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = 0$: $g\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

4 Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

5 Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
Comme $-\frac{1}{4} = -0,25$, le tableau de variations montre que l'équation $g(x) = m$, avec $m > -0,25$ a deux solutions, l'une sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, l'autre sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$.

- Sur $]0;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}]$
  D'après le théorème de la bijection :
  - ✍ g est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $]0;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}]$.
  - ✍ g est strictement croissante sur l' intervalle $]0;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}]$.
  - ✍ $g\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = -0,25$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$
  - ✍ g réalise donc une bijection de $]0;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}]$ sur $[-0,25;+\infty[$
    Comme $m \in [-0,25;+\infty[$, l'équation $g(x) = m$ a une racine unique α dans $]0;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}]$.
- Sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$
  D'après le théorème de la bijection :
  - ✍ g est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$.
  - ✍ g est strictement croissante sur l' intervalle $I = \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$.
  - ✍ $g\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = -0,25$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
  - ✍ g réalise donc une bijection de $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$ sur $[-0,25;+\infty[$
    Comme $m \in [-0,25;+\infty[$, l'équation $g(x) = m$ a une racine unique α dans $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$.

6 Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Dans $]0\ ;\ +\infty[$, $g(x) = 0 \iff \ln(x)[\ln(x) - 1] = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \ln(x) & = & 0 \\ \ln(x) - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} \ln(x) & = & 0 \\ \ln(x) & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ x & = & \mathrm{e} \end{array}\right.$

$$\boxed{S = \{1\ ;\ \mathrm{e}\}.}$$

Nom :	**DS 07**	TMATHS *Mars 2022*
Prénom :		*Devoir n° 07* . . . / . . .

Feuille de réponses de l'exercice 3 :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7	Question 8
Réponse	c	a	c	d	c	c	d	c