Nom :	**DS 05**	TMATHS — Janv. 2022
Prénom :		Devoir n° 05 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 4 points

4 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1 L'équation $\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5)$ est équivalente à :

Réponse A : $3x-2=x+5$
Réponse B : $2x^2-6x-8=0$
Réponse C : $2x^2-5x-3=x+5$
Réponse D : $x=4$.

2 X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3;p)$. On donne $P(X=0)=\dfrac{1}{64}$. Alors :

Réponse A : $p=\dfrac{1}{64}$
Réponse B : $p=\dfrac{1}{4}$
Réponse C : $p^3=\dfrac{1}{64}$
Réponse D : $(1-p)^3=\dfrac{1}{64}$.

3 La suite (u_n) est définie par $u_0=-0,5$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=0,5u_n+0,3$
Soit P_n la proposition : « $0\leq u_n\leq 0,6$ »

Réponse A :
P_0 est fausse,
donc pour tout $n\in\mathbb{N}, P_n$ est fausse.
Réponse B : P_n est héréditaire.
Réponse C : pour tout $n\in\mathbb{N}, P_n$ est vraie.
Réponse D : il existe $n\in\mathbb{N}^\star$ tel que P_n est fausse.

4 X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(6;0,2)$.
Alors $P(2\leq X<4)=\cdots$

Réponse A : $P(X=2)+P(X=3)$
Réponse B : $P(X<4)-P(X<1)$
Réponse C : $0,672$
Réponse D : $0,328$

Exercice 2 — 9 points

9 pts

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note :

- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

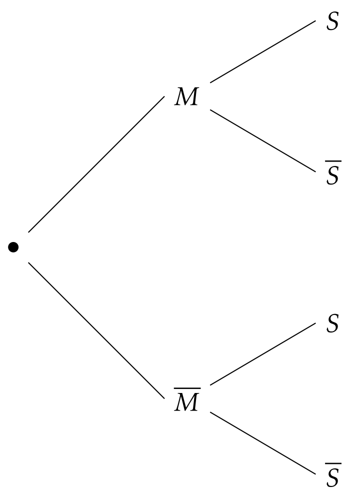
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1 On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0,98$;
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0,98$.

a. À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.

b. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



c. Montrer que : $P(S) = 0{,}021\,92$.

d. En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}.)

2 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0{,}021\,92$.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

c. En justifiant, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de :

- la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
- la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.

d. En justifiant, donner la valeur du plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.

Exercice 3 — 20 points

20 pts

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

Partie A

1 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

2 **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

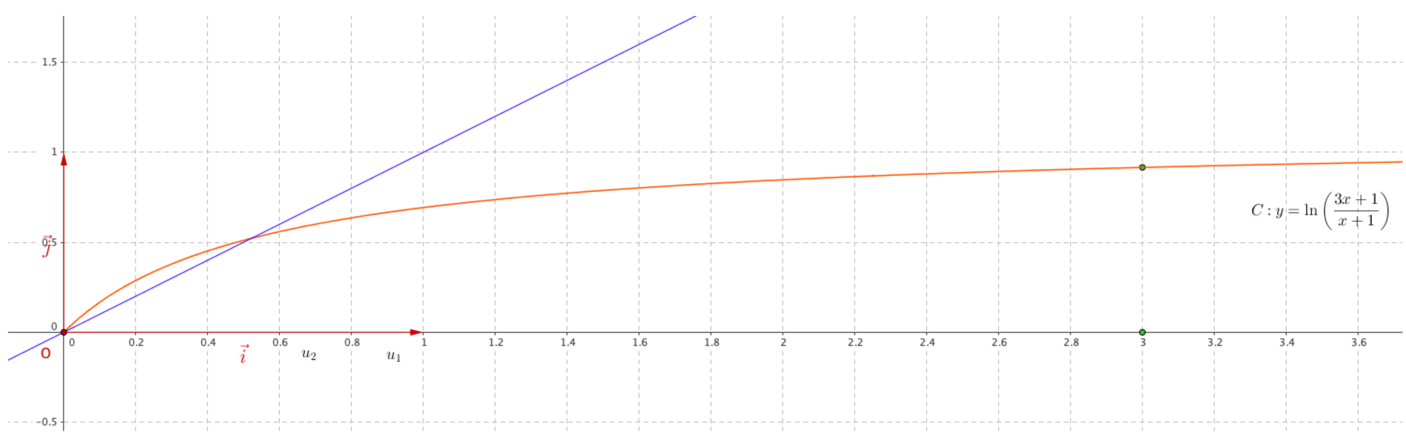
b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1 Sur la figure ci-dessous, placer sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1 et u_2 et conjecturer la monotonie et la convergence de la suite (u_n) dont on donnera une évaluation de la limite ℓ si besoin.



2 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

3 Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ où
$x_0 = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,215$ et $g(x_0) \approx 0,088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	0	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

1 Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.

2

a. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à $0,01$ près.

b. Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

$x \leftarrow 0,22$
Tant que .... faire
    $x \leftarrow x + 0,01$
Fin de Tant que

3 En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).