Nom : .... *Prénom :*	**DS 04**	TMATHS *Déc. 2021* *Devoir n° 04* .../...

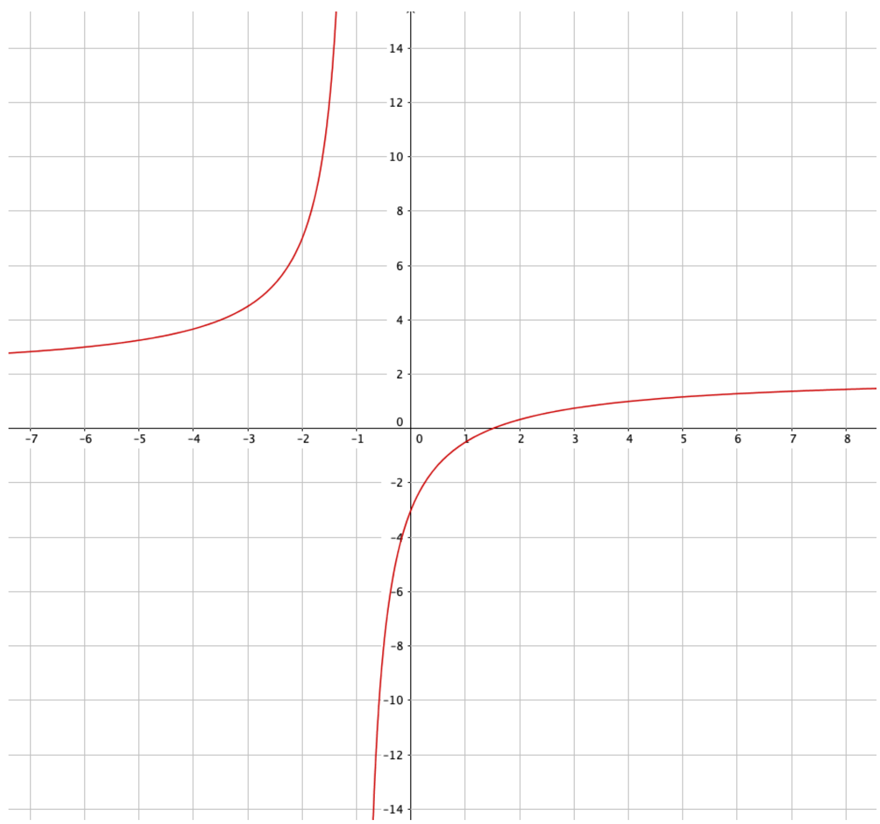
Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.
L'utilisation des fiches de cours est exceptionnellement autorisé pour ce devoir de Noël sous réserve qu'elles soient MANUSCRITES ET dans un PORTE-VUES.

Exercice 1 — 8 points

8 pts

Voici la courbe d'une fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.



1 Lire sur le graphique les limites de la fonction f en $-\infty, +\infty$, à droite et à gauche en 1.
On lit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
Par ailleurs $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$

2 La fonction représentée est la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$.

Etudier la convexité de la fonction f .
On étudie le signe de la dérivée seconde.

f est dérivable sur D_f comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans D_f : $\begin{cases} u(x) &= 2x-3 \\ v(x) &= x+1 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2 \\ v'(x) &= 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x+1)-1(2x-3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x+2-2x+3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2} = 5(x-1)^{-2}$, donc $f''(x) = 5 \times -2(x+1)^{-3} \times 1 = -\dfrac{10}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de -10		-		-	
signe de $(x+1)^3$		-	0	+	
signe de $f''(x)$		+	||	-	

$f''(x) > 0$ sur $]-\infty;-1[$, f est donc convexe sur $]-\infty;-1[$
$f''(x) < 0$ sur $]-1;+\infty[$, f est donc concave sur $]-1;+\infty[$

3 La courbe de f admet-elle un ou des points d'inflexion ? Si oui, lesquels ? La dérivée seconde ne s'annulant pas, la courbe de f ne présente pas de point d'inflexion.

Exercice 2 — 6 points

6 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.*

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= -2+t \\ z &= 4-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1 Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : M(2 ; 1 ; −1); **Réponse B :** N(−3 ; −4 ; 6);
Réponse C : P(−3 ; −4 ; 2); **Réponse D :** Q(−5 ; −5 ; 1).

$$M\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \Delta \iff \begin{cases} 2 &= 1+2t \\ 1 &= -2+t \\ -1 &= 4-t \end{cases} \iff \begin{cases} t &= \frac{1}{2} \\ t &= 3 \\ t &= 5 \end{cases}$$

Donc $M \notin \Delta$.

$$N\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \Delta \iff \begin{cases} -3 &= 1+2t \\ -4 &= -2+t \\ 6 &= 4-t \end{cases} \iff \begin{cases} t &= -2 \\ t &= -2 \\ t &= -2 \end{cases}$$

Donc $N \in \Delta$.

$\boxed{\text{La bonne réponse est } \mathbf{B}.}$

2 Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

Réponse A : $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Réponse B : $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

Réponse C : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Réponse D : $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{La bonne réponse est } \mathbf{C}.}$

3 Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

Réponse A : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse B : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse C : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Réponse D : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (AB) &\iff \overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BA} \\ &\iff \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La bonne réponse est } \mathbf{B}.}$

4 On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ;

Réponse B : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

Réponse C : D a pour coordonnées $(3\ ;\ -1\ ;\ -1)$;

Réponse D : les points A, B, C et D sont alignés.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} &\iff \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} \\ &\iff \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO} \\ &\iff \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \\ &\iff \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{AD}$ s'écrit comme combinaison linéire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

La bonne réponse est **A .**

Exercice 3 — 8 points

8 pts ABCDEFGH est un cube.I, J et K sont les milieux respectifs de [AB],[HD] et [HG]. On se place dans le repère :$\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

1 Déterminer les coordonnées des points B, C, D, E, I, J, K.

B$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, E$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, I$\begin{pmatrix}\frac12\\0\\0\end{pmatrix}$, J$\begin{pmatrix}0\\1\\\frac12\end{pmatrix}$, K$\begin{pmatrix}\frac12\\1\\1\end{pmatrix}$.

2 **a.** Donner un critère pour qu'une droite soit parallèle à un plan.
Une droite est parallèle à un plan ssi elle est parallèle à une droite de ce plan.

b. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).
(BD) est parallèle au plan (IJK) ssi $\overrightarrow{BD}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$;

$$\begin{aligned}
\text{(BD) est parallèle au plan (IJK)} &\iff \overrightarrow{BD} = s.\overrightarrow{IJ} + t.\overrightarrow{IK}\\
&\iff \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}\frac12\\1\\\frac12\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}\frac12 s = -1\\ s+t=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}s=-2\\ t=1-s=-1\\ 1-1=0\end{cases}
\end{aligned}$$

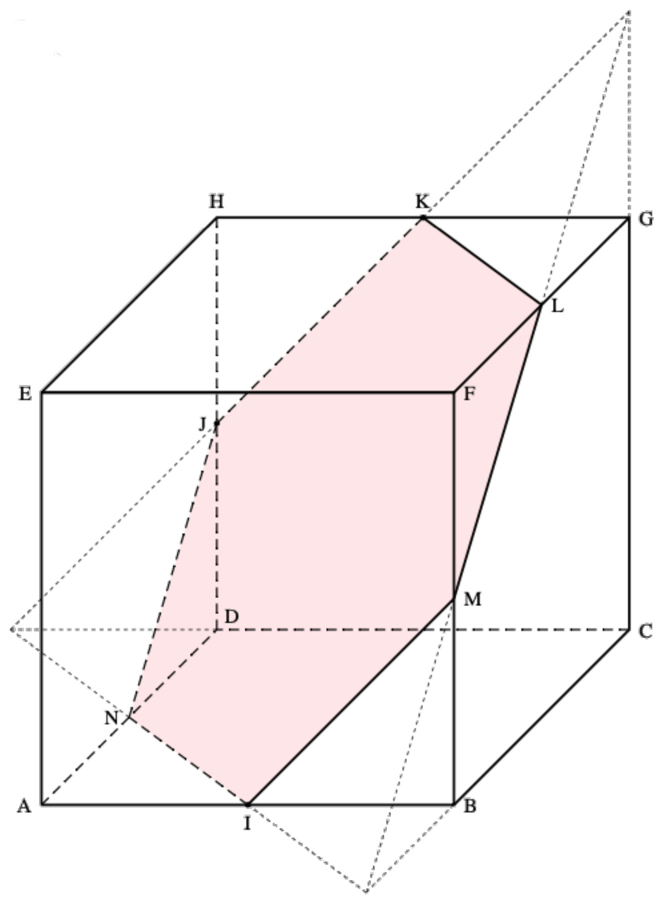
$\overrightarrow{BD} = 2.\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IK}$, ce qui prouve que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

c. Donner une représentation paramétrique de la droite (CE).

$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}x_E - x_C\\ y_E - y_C\\ z_E - z_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (CE) &\iff \overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CE}\\
&\iff \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-0\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}x = 1-t\\ y = 1-t \quad ,t\in\mathbb{R}\\ z = t\end{cases}
\end{aligned}$$

3 Sur l'annexe, à rendre avec la copie, construire la section du cube ABCDEFGH avec le plan (IJK). On laissera les traits de construction.



Exercice 4 — 8,5 points

8.5 pts Déterminer les limites suivantes, en justifiant avec soin :

1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x^2+3x-2\right)$

Vers l'infini, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x^2+3x-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3\right)=+\infty$

2 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{e}^x-3}{(x-1)^2}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on étudie le signe du dénominateur :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $(x-1)^2$		$+$	0	$+$	

on utilise l'écriture $\dfrac{\mathrm{e}^x-3}{(x-1)^2}=(\mathrm{e}^x-3)\times\dfrac{1}{(x-1)^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}\mathrm{e}^x-3=\mathrm{e}-3<0\\ \lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0^+\quad\text{Par inverse }\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty\end{array}\right\}\quad\text{Par produit}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{e}^x-3}{(x-1)^2}=-\infty$$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{3x+2}{x-4}}$

Vers l'infini, les fractions rationnelles ont la même limite que celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré.

Ici $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{x-4} = 3 \\ \\ \lim\limits_{t\to3} \sqrt{t} = \sqrt{3} \end{array}\right\} \text{ par composée } \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3x+2}{x-4}} = \sqrt{3}$$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + x\sin(x)\right)$

Pour tout réel x on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, en multipliant par x dont on peut supposer qu'il est positif. (On calcule ici une limite en $+\infty$.)

Donc $-x \leq x\sin x \leq x$

Puis en ajoutant x^2, il vient : $x^2 - x \leq x^2 + x\sin x \leq x^2 + x$

On a donc si $x \geq 0$, $f(x) \geq x^2 - x$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, d'après le théorème de minoration, on conclut $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + x\sin(x)\right) = +\infty$.

Exercice 5 — 9,5 points

9.5 pts Soit la fonction f définie sur $I =]-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x+2}$$

1 Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.

- En $+\infty$: Vers l'infini, les fractions rationnelles ont la même limite que celle du quotient simplifié des termes de plus haut degré.
  Ici $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
- En -2^+ : on étudie le signe du dénominateur :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
signe de $(x+2)$		-	0	+	

on utilise l'écriture $\dfrac{x^3}{x+2} = x^3 \times \dfrac{1}{x+2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-2^+} x^3 = -8 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} (x+2) = 0^+ \quad \text{Par inverse } \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to-2^+} \frac{x^3}{x+2} = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty}$$

2 Déterminer la fonction dérivée f' et montrer que

$$f'(x) = \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

f est dérivable sur $]-2; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans : $\begin{cases} u(x) &= x^3 \\ v(x) &= x+2 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 3x^2 \\ v'(x) &= 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x+2) - 1 \times x^3}{(x+2)^2} \\ &= \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x+2)^2} \\ &== \frac{2x^3 + 6x^2}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

3 En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]-2;+\infty[$.
On étudie le signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
signe de $(2x^2)$		+		+		+	0	+	
signe de $x+3$		-	0	+		+		+	
signe de $(x+2)^2$		+		+	0	+		+	
signe de $f'(x)$		-	0	+	‖	+	0	+	

On déduit le tableau de variations de f sur $]-2;+\infty[$:

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	+	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

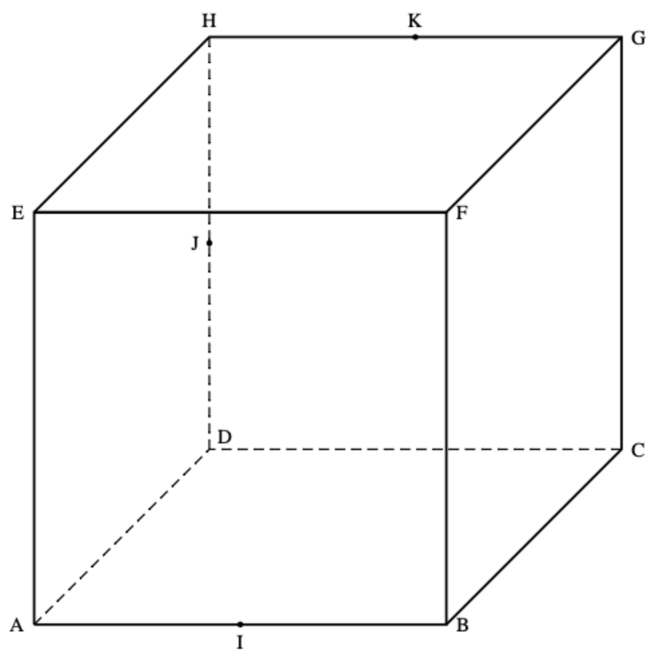
4 Démontrer que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-2;+\infty[$ puis montrer que $-1,5 < \alpha < 0$.
D'après le théorème de la bijection :

- ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I =]-2;+\infty[$.
- ✍ f est strictement croissante sur l' intervalle $I =]-2;+\infty[$.
- ✍ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- ✍ f réalise donc une bijection de $]-2;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$
  Comme $-2 \in]-\infty;+\infty[$, l'équation $f(x) = -2$ a une racine unique α dans $]-2;+\infty[$.

- $(0) = 0 > -2$
- $f(-1,5) = -6,75 < -2$

$\boxed{\text{On a donc bien } -1,5 < \alpha < 0}$

Nom : . . . . *Prénom :*	**DS 04**	TMATHS Obaidat *Déc. 2021* *Devoir n° 04* . . . / . . .



Nom :	**DS 04**	TMATHS *Déc. 2021*
Prénom :		*Devoir n° 04* .../...

Feuille de réponses de l'exercice 2 :

✄ ✄

A rendre au bout de 20 minutes.

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4
Réponse				