Nom : .... *Prénom :*	**DS 03** CASE DES MATHS	TMATHS8 *Nov. 2021* *Devoir n° 03* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 9 points

9 pts

Déterminer la limite des suites suivantes :

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2n-5}{n^2+3}$
2. Pour tout entier naturel n, $v_n = -2n + 5n^2 + (-0,3)^n$
3. Pour tout entier naturel n, $w_n = \dfrac{\sin(n) - 5}{n+1}$ (un encadrement sera nécessaire)
4. Pour tout entier naturel n, $y_n = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n}$

Exercice 2 — 17,5 points

17.5 pts

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

1. **a.** Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?
   b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
2. **a.** Démontrer **par récurrence** que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
   b. En déduire, **en justifiant la réponse**, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).
   c. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

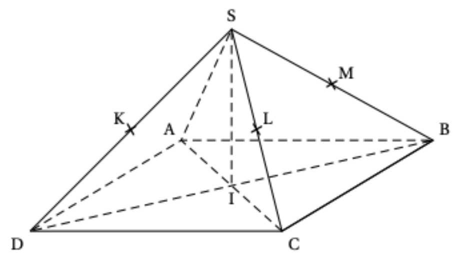
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 3 — 10,5 points

10.5 pts *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 3 qui sera ramassé 30 minutes apès le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1 Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

2 La droite (KL) et le plan (SAB) sont :

a. sécants **b.** parallèles **c.** ni sécants, ni parallèles **d.** coplanaires

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{IC}},\,\overrightarrow{\mathrm{IB}},\,\overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{I}(0\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{A}(-1\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{B}(0\,;\,1\,;\,0)\,;\,\mathrm{C}(1\,;\,0\,;\,0);\mathrm{D}(0\,;\,-1\,;\,0)\,;\,\mathrm{S}(0\,;\,0\,;\,1).$$

3 Les coordonnées du point M sont :

a. $\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ **b.** $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$

4 Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\dfrac{1}{4}\,;\,-\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$

5 Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

6 Les coordonnées du point T tel que $\overrightarrow{AT} = 3\overrightarrow{BC}$ sont :

a. $(2\,;\,-3\,;\,0)$ **b.** $(3\,;\,-3\,;\,0)$ **c.** $(4\,;\,-3\,;\,0)$ **d.** $(0\,;\,2\,;\,-3)$

7 Les points I, L, M et Q sont coplanaires si :

a. $Q(3\,;\,1\,;\,2)$ **b.** $Q(3\,;\,-1\,;\,2)$ **c.** $Q(2\,;\,-1\,;\,2)$ **d.** $Q(-3\,;\,1\,;\,-2)$

Exercice 4 — *6,5 points*

6.5 pts On considère la fonction f définie sur $[-5;10]$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1 Étudier les variations de f sur $[-5;10]$ et dresser son tableau de variation sur $[-5;10]$.

2 Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-5;10]$.

3 Donner un encadrement de 10^{-2} près.

✄ ✄

A rendre au bout de 30 minutes.

Nom :	**DS 03** CASE DES MATHS	TMATHS8 *Nov. 2021*
Prénom :		*Devoir n° 03* .../...

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6	Question 7
Réponse							