Nom :	DS 01 CASE DES MATHS	TMATHS8 Sept. 2021
Prénom :		Devoir n° 02 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 3 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page ?? qui sera ramassé 15 minutes apès le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué $0,5$ *point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

0.5 pt **1** Dans $\mathbb{R}$, l'équation $5x^2 - 3x + 8 = 0$ a :

a. Aucune solution **b.** Une solution **c.** deux solutions

0.5 pt **2** La fonction racine carrée est

a. définie et dérivable sur $[0;+\infty[$
b. définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur$]0;+\infty[$
c. définie sur $]0;+\infty[$ et dérivable sur$]0;+\infty[$

0.5 pt **3** f est une fonction définie sur$\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)(3x-7)$. Alors $f'(x) =$

a. $9x^2 - 14x + 3$
b. $3x^2 - 14x - 3$
c. $9x^2 - 11x + 4$

0.5 pt **4** h est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $h(x) = 4x^5 - 2x + \frac{3}{x}$. Alors $h'(x) =$

a. $20x^4 - 2 + \frac{3}{x^2}$
b. $20x^4 - 2 - \frac{3}{x^2}$
c. $16x^4 - 2 - \frac{3}{x^2}$

0.5 pt **5** j est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $j(x) = x^2$. C_j est la courbe représentative de la fonction j dans un repère. L'équation de la tangente à Cj $C_j$au point d'abscisse - 1 est :

a. $y = -2x - 2$
b. $y = -2x + 1$
c. $y = -2x - 1$

0.5 pt **6** g est une fonction définie et dérivable sur $[0; = \infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$. Alors $g'(x) =$

a. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
b. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$
c. $2\sqrt{x}$

Feuille de réponses de l'exercice 1 :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5	Question 6
Réponse	A	B	A	B	C	B

Exercice 2 — 7 points

7 pts La fonction f est la fonction définie sur $[0;6]$ par $f(x) = (10x-5)e^{-x}$.

1 Dresser le tableau de variation de f sur $[\,0\,;6\,]$.
Préciser les extrémums et les valeurs aux bornes de l'intervalle de définition.

✍ Dérivée : f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. $f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $[0;6]$:

$\begin{cases} u(x) &= 10x-5 \\ v(x) &= e^{-x} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 10 \\ v'(x) &= -e^{-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10e^{-x} + (-e^{x})(10x-5)) \\ &= e^{-x}(10-10x+5) \\ &= (-10x+15)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-10x+15)e^{-x}}$$

✍ Signe de la dérivée : pour tout x réel, ona $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $(-10x+15)$.

- $f'(x) = 0 \iff -10x+15 = 0 \iff -10x = -15 \iff x = \frac{3}{2}$
- $f'(x) > 0 \iff -10x+15 > 0 \iff -10x > -15 \iff x < \frac{3}{2}$

✍ Tableau de variation :

x	0		$\frac{3}{2}$		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-5	↗	$10e^{-1,5}$	↘	$55e^{-6}$

2 Etudier la convexité de f sur $[\,0\,;6\,]$.

✍ Dérivée seconde : f' est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f' = uv$, d'où $f'' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $[0;6]$: $\begin{cases} u(x) &= -10x+15 \\ v(x) &= e^{-x} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= -10 \\ v'(x) &= -e^{-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -10e^{-x} + (-e^{x})(-10x+15)) \\ &= e^{-x}(-10+10x-15) \\ &= (10x-25)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f''(x) = (10x-25)e^{-x}}$$

✍ Signe de la dérivée seconde : pour tout x réel, ona $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $(10x-25)$.

- $f''(x) = 0 \iff 10x-25 = 0 \iff 10x = 25 \iff x = \frac{5}{2}$

- $f'(x) > 0 \iff 10x - 25 > 0 \iff 10x > 25 \iff x > \frac{5}{2}$

✍ Conclusion :

- Sur $[0;2,5]$, f'' est négative, donc f est concave.
- Sur $[2,5;6]$, f'' est positive, donc f est convexe.

3 La courbe de f admet-elle un point d'inflexion sur $[0\,;\,6\,]$? Si oui lequel ? Justifier.
La dérivée seconde de f s'annule et change de signe en $x = 2,5$ donc la courbe présente un point d'inflexion d'abscisse 2,5 et d'ordonnée $f(2,5) = 20e^{-2,5}$.

4 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0. T a pour équation $y = f'(0@)(x-0) + f(0)$

✏ $f'(0) = 15e^0 = 15$

✏ $f(0) = -5e^0 = -5$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = 15(x-0) - 5, \text{ soit } y = 15x - 5}$$

Exercice 3 — 6,5 points

6.5 pts

1 Soit g la fonction définie sur $I = [-3;10]$ par $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 2$

a. Etudier les variations de g sur l'intervalle I.

✍ Dérivée : $g'(x) = 6x^2 + 24x = 6x(x+4)$

✍ Signe de la dérivée : $6x^2 + 24x$ est un trinôme du second degré qui a pour racines -4 et 0 ; il a donc le signe de $a = 6$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
signe de $x^2 + x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✍ On déduit le tableau de variations de g sur $[-3;10]$:

x	-3		0		10
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	56	↘	2	↗	3202

b. En déduire le signe de $g(x)$ sur I.
Donc sur I, g admet un minimum qui est 4 donc $g(x) > 0$ (car $g(x) \geq 4$)

2 Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x + 4}$.

a. Justifier que f est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. $f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans I : $\begin{cases} u(x) &= x^3 - 2 \\ v(x) &= x + 4 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 3x^2 \\ v'(x) &= 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x+4) - 1(x^3-2)}{(x+4)^2} \\ &= \frac{3x^3 + 12x^2 - x^3 + 2)}{(x+4)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 12x^2 + 2)}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^3 + 12x^2 + 2)}{(x+4)^2} = \frac{g(x)}{(x+4)^2}}$$

b. En s'aidant de la question précédente, déduire le signe de $f'(x)$ sur I puis les variations de la fonction f.
g est strictement positive sur I et $(x+4)^2 > 0$ sur$\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ donc sur I donc $f'(x) > 0$ sur I donc f est strictement croissante sur I.

Exercice 4 — 3 points

3 pts Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les propriétés algébriques de l'exponentielle :

$$A = \frac{e^{-5}}{e^{-3+2x}} = e^{-5+3-2x} = e^{-2x-2} \qquad B = e^{-9} \times e^{-2x+4} \times e^{8} = e^{-9-2x+4+8} = e^{-2x+3}$$

$$C = \left(e^{-4}\right)^2 \times e^{3x+2} \times \frac{1}{e^6} = e^{-8} \times e^{3x+2} \times e^{-6} = e^{-8+3x+2-6} = e^{3x}$$

$$\boxed{A = e^{-2x-2} \qquad B = e^{-2x+3} \qquad C = e^{3x}}$$

Exercice 5 : Equations — 5 points

5 pts Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $\mathrm{e}^{-3x+5} = \mathrm{e}^{5x+4}$
On utilise la propriété $e^a = e^b \iff a = b$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-3x+5} = \mathrm{e}^{5x+4} &\iff -3x + 5 = 5x + 4 \\ &\iff -8x = -1 \\ &\iff x = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{8}\right\}}$$

2 $\mathrm{e}^{x^2+2x-3} = 1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x^2+2x-3} = 1 &\iff \mathrm{e}^{x^2+2x-3} = e^0 \\ &\iff x^2 + 2x - 3 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2} = -3$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-3;1\}}$$

Exercice 6 — 0 point

Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

1 $f(x) = 4x^2 + 2x + 1 - 3e^x$

$$\boxed{f'(x) = 8x + 2 - 3e^x}$$

2 $g(x) = 2x^3 e^x$

g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables.

$g = uv$, d'où $g' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = 2x^3 \\ v(x) & = e^x \end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = 6x^2 \\ v'(x) & = e^x \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x^2e^x + 2x^3e^x \\ &= 2x^2e^x(x+3) \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = 2x^2e^x(x+3)}$$

3 $h(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$

h est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$h = \dfrac{u}{v}$ d'où $h' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$: $\left\{\begin{array}{ll} u(x) & = e^x - 2 \\ v(x) & = e^x + 1 \end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll} u'(x) & = e^x \\ v'(x) & = e^x \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{e^x(e^+1) - e^x(e^x - 2))}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^+1 - e^x + 2))}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{3e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{3e^x}{(e^x+1)^2}}$$