

# DEVOIR COMMUN 2021 DE MATHÉMATIQUES

## – Spécialité Maths –

Durée de l'épreuve : 2 HEURES

Les calculatrices sont **AUTORISÉES**

---

*Les calculatrices sont autorisées.*

*Le candidat doit traiter les trois exercices en commençant par le troisième qui sera ramassé au bout de 40 minutes.*

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- ▶ le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.
- ▶ le nom de votre groupe : TMATHS1 ou TMATHS2 ou ...

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages.**

 Exercice 1

12,5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

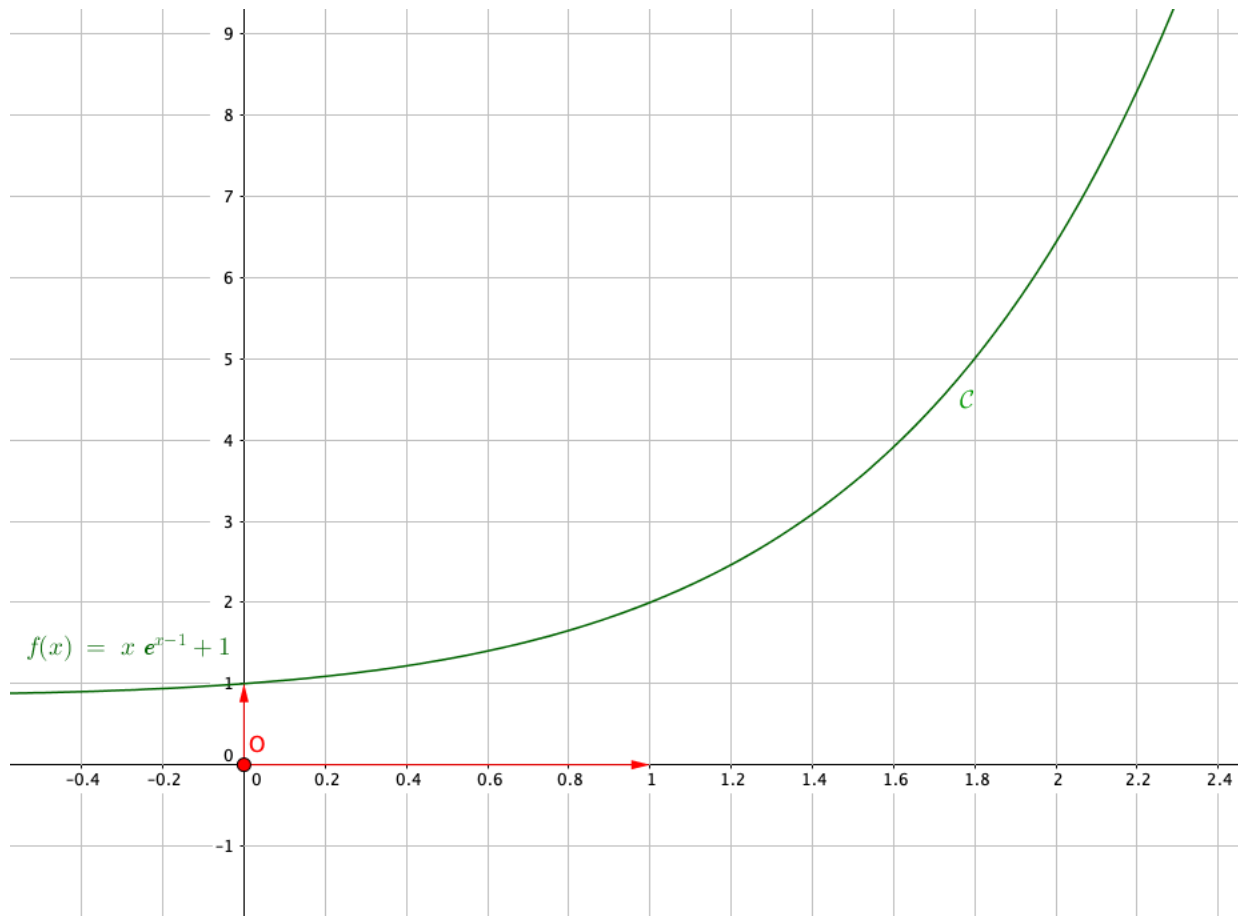
On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**Partie A : étude de la fonction**

- 2 pts **1** Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .  
Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$ ?
- 1 pt **2** Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- 1.5 pt **3** On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $f'$  sa fonction dérivée.  
Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (x + 1)e^{x-1}$ .
- 3 pts **4** Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie B : calcul d'aire**

Le graphique donné ci-dessous représente la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



1 pt **1** Construire sur ce graphique la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$ . On admet que la courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de la droite  $\Delta$ . Hachurer le domaine  $\mathcal{D}$  limité par la courbe  $\mathcal{C}$  la droite  $\Delta$ , la droite d'équation  $(x = 1)$  et l'axe des ordonnées.

**2** On pose  $I = \int_0^1 xe^{x-1} dx$ .

2 pts **a.** On note  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = xe^{x-1}$ .  
On définit la fonction  $G$  sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = (ax + b)e^{x-1}$ .  
Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $G$  soit une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

1 pt **b.** Montrer que  $I = \frac{1}{e}$ .

1 pt **3** En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine  $\mathcal{D}$ .

### Exercice 2

10 points

Les trois parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes.

#### Partie A :

1.5 pt **1** Calculer  $\int_{-1}^1 (1 - e^{2x}) dx$

1.5 pt **2** Déterminer la valeur moyenne de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  sur  $[1; 10]$ .

#### Partie B

2.5 pts A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I = \int_0^\pi (2x + 1) \cos x dx$

#### Partie C

Soit  $n$  un entier naturel non nul. on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1.5 pt **1** Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $0 \leq I_n$ .

2 pts **2** Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante.

1 pt **3** En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente.

### Exercice 3

7,5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 5 qui sera ramassé 40 minutes après le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1,5 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal.

Le plan (P) a pour équation  $x - y + 3z + 1 = 0$ , le plan (R) a pour équation  $2x - y - z - 7 = 0$ .

On donne les points  $A(1 ; 1 ; 0)$ ,  $B(3 ; 0 ; -1)$  et  $C(7 ; 1 ; -2)$ .

La droite (D) dont une représentation paramétrique est  $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = -5+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1.5 pt **1** Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a.  $\begin{cases} x = 1+3k \\ y = 1 \\ z = -k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

b.  $\begin{cases} x = 3-2k \\ y = k \\ z = -1+k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

c.  $\begin{cases} x = 2+k \\ y = -1+k \\ z = -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

d.  $\begin{cases} x = 1k+3s \\ y = 1k \\ z = -s \end{cases}, k \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$

1.5 pt **2** Les droite (D) et (AB) sont :

- a. sécantes non perpendiculaires
- b. confondues
- c. strictement parallèles
- d. orthogonales

1.5 pt **3** Les plans (P) et (R) sont :

- a. confondus.
- b. sécants non perpendiculaires.
- c. strictement parallèles.
- d. sécants et perpendiculaires.

1.5 pt **4** Les plans (P) et (ABC) sont :

- a. confondus.
- b. sécants non perpendiculaires.
- c. strictement parallèles.
- d. sécants et perpendiculaires.

1.5 pt **5**

- a. La droite (D) coupe le plan (R) en un point.
- b. La droite (D) est incluse dans le plan (R).
- c. Le point A est le projeté orthogonal du point B sur le plan (R).
- d. Le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan (R).



**A rendre au bout de 40 minutes.**

Nom , prénom :

Groupe :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Réponse					