Lycée l'Oiselet **20 Mai 2021**

DEVOIR COMMUN 2021 DE MATHÉMATIQUES – Spécialité Maths –

Durée de l'épreuve : 2 HEURES

Les calculatrices sont AUTORISÉES

Les calculatrices sont autorisées.

Le candidat doit traiter lestrois exercices en commençant par le troisième qui sera ramassé au bout de 40 minutes.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- *le nom de votre groupe : TMATHS1 ou TMATHS2 ou $\cdots$.*

Exercice 1 — 12,5 points

Partie A : étude de fonction

1.5 pt **1** Pour tout réel x on a $f(x) = x\mathbf{e}^x \times \mathbf{e}^{-1} + 1$, or (croissances comparées) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathbf{e}^x = 0$, donc, par opérations sur les limites

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.}$$

0.5 pt On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

1 pt **2** On a $f(x) = x\mathbf{e}^x \times \mathbf{e}^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites (il n'y a aucune forme indéterminée ici) :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{e}^x = +\infty\end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim_{x \to +\infty} x\mathbf{e}^x = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathbf{e}^x = +\infty.$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

1.5 pt **3** Par opérations usuelles sur les dérivées :

$$f'(x) = 1\mathbf{e}^{x-1} + x \times 1 \times \mathbf{e}^{x-1} = (x+1)\mathbf{e}^{x-1}.$$

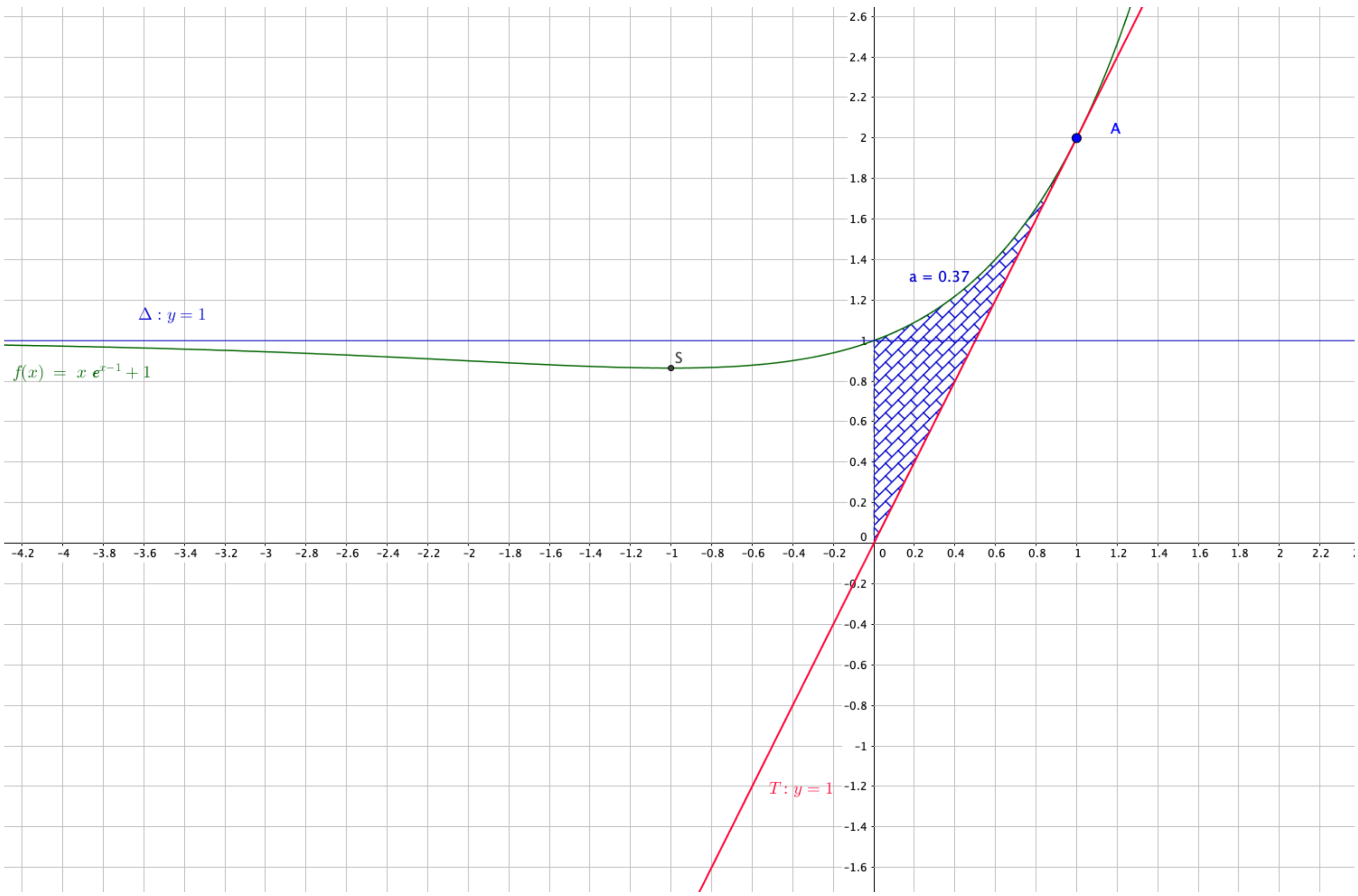
$$\boxed{f'(x) = (x+1)\mathbf{e}^{x-1}}$$

3 pts **4** Pour tout réel x, $\mathbf{e}^{x-1} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+1$. Or $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	$\searrow$	$1 - \mathbf{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : calcul d'aire

1 pt **1**



2 pts **2** **a.** On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x-1}$.
On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (ax+b)e^{x-1}$.
Déterminer les réels a et b tels que G soit une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$ ssi G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on a $G'(x) = g(x)$.
G est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables. $G = uv$ d'où $G' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x : $\begin{cases} u(x) &= ax+b \\ v(x) &= e^{x-1} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= a \\ v'(x) &= e^{x-1} \end{cases}$

$$\begin{aligned} G'(x) &= ae^{x-1} + e^{x-1}(ax+b) \\ &= e^{x-1}(ax+a+b) \end{aligned}$$

Pour tout x réel $G'(x) = g(x)$ ssi pour tout x réel $e^{x-1}(ax+a+b) = xe^{x-1}$
d'où en divisant par $e^{x-1} > 0$ pour tout x réel $(ax+a+b) = 1 \times x + 0$
En identifiant les termes de même degré, il vient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ définie par } G(x) = (x-1)e^{x-1} \text{ est une primitive de } g \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

1 pt **b.** Montrer que $\mathrm{I} = \dfrac{1}{e}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x\mathrm{e}^{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [G(x)]_0^1 \\ &= \left[(x-1)\mathrm{e}^{x-1}\right]_0^1 \\ &= 0\times\mathrm{e}^0-(-1)\times\mathrm{e}^{-1} \\ &= \mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{I}=\frac{1}{\mathrm{e}}.}$$

On peut signaler que ce calcul pouvait également se faire à l'aide d'une intégration par parties :

Posons $\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) &=& \mathbf{e}^{x-1} \\ v(x) &=& x \end{array}\right.$, et $\left\{\begin{array}{rcl} u(x) &=& \mathbf{e}^{x-1} \\ v'(x) &=& 1 \end{array}\right.$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0\ ;\ 1]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0\ ;\ 1]$, le théorème d'intégration par parties s'applique donc, et :

$$I=\left[x\mathbf{e}^{x-1}\right]_0^1-\int_0^1 \mathbf{e}^{x-1}\mathrm{d}x=\left[x\mathbf{e}^{x-1}\right]_0^1-\left[\mathbf{e}^{x-1}\right]_0^1=(1-0)-\left(1-\mathbf{e}^{-1}\right)=\frac{1}{\mathbf{e}}.$$

1 pt **3** Sur $[0\ ;\ 1]$ $\mathcal{C}$ est au dessus de Δ, donc l'aire $\mathcal{A}$ du domaine considéré est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 (f(x)-2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x\mathbf{e}^{x-1}+1-2x\right)\mathrm{d}x \\ &= I+\int_0^1 (1-2x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(par linéarité)} \\ &= I+\left[x-x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\mathbf{e}}+(1-1) \end{aligned}$$

Finalement : $\mathcal{A}=\dfrac{1}{\mathbf{e}}$ (en unités d'aire).

Exercice 2 — 10 points

Les trois parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

1.5 pt **1** Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(1-\mathrm{e}^{2x}\right) dx$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(1-\mathrm{e}^{2x}\right)dx &= \left[x-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1}\\ &= 1-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2}-\left(-1-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}\right)\\ &= 2+\tfrac{\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-1}^{1}\left(1-\mathrm{e}^{2x}\right)dx = 2+\frac{\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{2}}{2}}$$

1.5 pt **2** Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ sur $[1;10]$.

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$$\begin{aligned}\mu &= \tfrac{1}{10-1}\int_1^{10}\frac{x}{x^2+1}\,dx\\ &= \tfrac{1}{9}\int_1^{10}\frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+1}\,dx\end{aligned}$$

On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln|u|$

$$\begin{aligned}\mu &= \tfrac{1}{9}\times\tfrac{1}{2}\int_1^{10}\frac{2x}{x^2+1}\,dx\\ &= \tfrac{1}{18}\left[\ln|x^2+1|\right]_1^{10}\\ &= \tfrac{1}{18}(\ln(101)-\ln 2)\end{aligned}$$

La valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ sur $[1;10]$ est $\mu=\frac{1}{18}(\ln(101)-\ln 2)$.

Partie B

2.5 pts A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I=\displaystyle\int_0^{\pi}(2x+1)\cos x\,dx$

Posons $\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) &=& \cos x\\ v(x) &=& 2x+1\end{array}\right.$, et $\left\{\begin{array}{rcl} u(x) &=& \sin x\\ v'(x) &=& 2\end{array}\right.$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0\ ;\ \pi]$, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0\ ;\ \pi]$, le théorème d'intégration par parties s'applique donc, et :

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi}(2x+1)\times\cos x\,dx\\ &= [(2x+1)\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2\sin x\,dx\\ &= [(2x+1)\sin x]_0^{\pi}-[-2\cos x]_0^{\pi}\\ &= [(2x+1)\sin x+2\cos x]_0^{\pi}\\ &= (2\pi+1)\sin\pi+2\cos\pi-(\sin 0+2\cos 0)\\ &= -2-2=-4\end{aligned}$$

$$\boxed{I = \int_0^{\pi} (2x+1)\cos x\, dx = -4}$$

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1.5 pt **1** Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leqslant I_n$.

Pour tout réel x de $[0;1]$, on a $x^n \geq 0$, et $1+x>0$, d'où par quotient $\dfrac{x^n}{1+x} \geq 0$.

D'après la positivité de l'intégrale, comme $0<1$, on déduit $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \geq 0$

$$\boxed{\text{Ainsi } I_n \geq 0}$$

2 pts **2** Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
On forme $I_{n+1} - I_n$ et on étudie son signe :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\right)\mathrm{d}x \qquad \text{Linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On étudie alors le signe de la fonction sous l'intégrale :

x	0		1
signe de x^n	0	+	
signe de $(x-1)$		-	0
signe de $x+1$		+	
signe de $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x}$	0	-	0

Ainsi pour tout réel x de $[0;1]$, on a $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0$.
On intègre de 0à 1, d'après la propriété sur intégrale et inégalités, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 0\,\mathrm{d}x$$

soit

$$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x \leq 0$$

$$I_{n+1} - I_n \leq 0$$

Conclusion : la suite (I_n) est décroissante.

1 pt **3** En déduire que la suite (I_n) est convergente.
La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

Exercice 3 — *7,5 points*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 5 qui sera ramassé 40 minutes apès le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1,5 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal.
Le plan (P) a pour équation $x-y+3z+1=0$, le plan (R) a pour équation $2x-y-z-7=0$.
On donne les points $A(1\,;1\,;0), B(3\,;0\,;\,-1)$ et $C(7\,;1\,;-2\,)$.

La droite (D) dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{lcr} x &=& 2t\\ y &=& 1+t\\ z &=& -5+3t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$

1.5 pt **1** Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+3k\\ y &=& 1\\ z &=& -k\end{array}\right., k\in\mathbb{R}$

b. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3-2k\\ y &=& k\\ z &=& -1+k\end{array}\right., k\in\mathbb{R}$

c. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+k\\ y &=& -1+k\\ z &=& -1\end{array}\right., k\in\mathbb{R}$

d. $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1k+3s\\ y &=& 1k\\ z &=& -s\end{array}\right., k\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{R}$

On élimine le d. car ce n'est pas une représentation paramétrique de droite.
Pour choisir entre les autres, une stratégie possible est de chercher s'il existe une valeur du paramètre qui correspond à chacun des points A et B. Dans le système proposé au b., on retrouve les coordonnées de A avec $k=1$ et celles de B avec $k=0$,

donc la bonne réponse est la réponse b.

1.5 pt **2** Les droite (D) et (AB) sont :

a. sécantes non perpendiculaires
b. confondues

c. strictement parallèles

d. orthogonales

On commence par déterminer un vecteur directeur de chacune des deux droites :

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$) est un vecteur directeur de (AB).

- Ces coordonnées ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, et les droites D et (AB) ne sont pas parallèles : on élimine b. et c.
- $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 2+1\times(-1)+3\times(-1) = 4-1-3 = 0$
  $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$, donc $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux,
  donc D et (AB) sont orthogonales.

La bonne réponse est la réponse d.

1.5 pt **3** Les plans (P) et (R) sont :

a. confondus.

b. sécants non perpendiculaires.

c. strictement parallèles.

d. sécants et perpendiculaires.

On commence par déterminer un vecteur normal à chacun des deux plans : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

$\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P. (On peut remarquer au passage que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, donc (AB) est perpendiculaire à R !)

- Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc $\vec{n}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et les plans P et R ne sont pas parallèles : on élimine a. et b.
- $\vec{n}\cdot\vec{v} == 1\times 2+(-1)\times(-1)+3\times(-1) = 0$
  $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, donc P et R sont perpendiculaires.

La bonne réponse est la réponse d.

1.5 pt **4** Les plans (P) et (ABC) sont :

a. confondus.

b. sécants non perpendiculaires.

c. strictement parallèles.

d. sécants et perpendiculaires.

- $x_A - y_A + 3z_A + 1 = 1 - 1 + 3 \times 0 + 1$
  $x_A - y_A + 3z_A + 1 \neq 0$ donc A$\notin$ P donc P et (ABC) ne peuvent pas être confondus : on élimine a.
- Les plans P et (ABC) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
  Les plans P et (ABC) sont parallèles si et seulement si $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

  Tester l'orthogonalité de deux vecteurs est chose aisée avec le produit scalaire, commençons par là. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ (vu au 3.) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, ainsi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 6 + (-1) \times 0 + 3 \times (-2) = 0$

  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

  Ainsi $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ donc les plans P et (ABC) sont parallèles. Et comme ils ne sont pas confondus, ils sont strictement parallèles.

La bonne réponse est la réponse b.

1.5 pt **5**

a. La droite (D) coupe le plan (R) en un point.

b. La droite (D) est incluse dans le plan (R).

c. Le point A est le projeté orthogonal du point B sur le plan (R).

d. Le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan (R).

Comme on a remarqué au 3. que (AB) est perpendiculaire à R, les réponses c. et d. ne sont pas absurdes. Pour savoir si l ?une des deux est la bonne, il suffit de tester l ?appartenance des points A et B au plan R.
$2x_B - y_B - z_B - 7 = 2 \times 3 - 0 - (-1) - 7$
$2x_B - y_B - z_B - 7 = 0$ donc B $\in$ R. La droite (AB) est perpendiculaire à R et le point B appartient à R, donc B est le projeté orthogonal de A sur R.

La bonne réponse est la réponse d.

✄ ✄

A rendre au bout de 40 minutes.
Nom , prénom :
Groupe :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Réponse	b	d	d	b	d