Nom :	**DS 08**	TMATHS3 Oiselet — Devoir n° .../...	Av. 2021
Prénom :			

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *18 points*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1 Étude d'une fonction f On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

1.5 pt **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

La limite de la fonction f en 0 est $-\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to0\ ;\ x>0}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to0\ ;\ x>0}(\ln(x))=-\infty$; donc on obtient par produit le résultat énoncé.

$$\boxed{\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty}$$

En $+\infty$, la limite de la fonction f est 0 (voir le cours).

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$$

1 pt **b.** Interpréter graphiquement les résultats.

$\displaystyle\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$, donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$, donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

1 pt **c.** Calculer la dérivée f' de la fonction f.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln(x)}{x^2}=\frac{1}{x^2}\times(1-\ln(x))\,.$$

2 pts **d.** En déduire les variations de la fonction f.

Comme $x^2>0$ sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $(1-\ln(x))$ sur $]0\,;\,+\infty[$,
or sur $]0\,;\,+\infty[$;
$1-\ln(x)>0 \iff x<\mathrm{e}$;
$1-\ln(x)=0 \iff x=\mathrm{e}$
On déduit le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

2 pts **e.** Montrer que l'équation $f(x) = 0,3$ admet une solution unique α dans $[e;+\infty[$. Donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

D'après le théorème de la bijection :

- ✍ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $I = [e;+\infty[$.
- ✍ f est strictement décroissante sur l' intervalle $I = [e;+\infty[$.
- ✍ $f(e) = \dfrac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ✍ f réalise donc une bijection de $[e;+\infty[$ sur $\left]0;\dfrac{1}{e}\right]$

  Comme $0,3 \in \left]0;\dfrac{1}{e}\right](\dfrac{1}{e} \approx 0,36$), l'équation $f(x) = 0,3$ a une racine unique α dans $[e;+\infty[$.

Grâce à une calculatrice, on obtient : $f(5,9) \approx 0,3008$ et $f(6) \approx 0,2986$ ainsi $f(5,9) > 0,3 > f(6)$, et donc comme f est strictement décroissante sur $[e;+\infty[, 5,9 < \alpha < 6$

$$\boxed{5,9 \text{ est donc une valeur approchée de } \alpha \text{ au dixième.}}$$

2 Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère$\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}\right)$.

2.5 pts **a.** Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

La limite de g en 0 est $+\infty$ car $g(x) = f(x) \times \ln(x)$ or ,
$\lim\limits_{x\to0\ ;\ x>0} \ln(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0\ ;\ x>0} f(x) = -\infty$; donc on obtient par produit le résultat énoncé.
La limite de g en $+\infty$ est 0 car :

$$4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{(\ln(x))^2}{x} = g(x).$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\left(\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2\right) = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(4\left(\dfrac{\ln(X)}{X}\right)^2\right) = 0$ car $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(X)}{X}\right) = 0$; on a posé $X = \sqrt{x}$ et X tend vers $+\infty$ quand $x$tend vers $+\infty$.

1 pt **b.** Interpréter graphiquement les résultats.

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_g$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$.

1 pt **c.** Calculer la dérivée g' de la fonction g.

$g'(x) = \dfrac{1}{x^2} \times (2\ln(x) - (\ln(x))^2) = \dfrac{1}{x^2} \times (2 - \ln(x)) \times \ln(x)$,

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{x^2} \times (2 - \ln(x)) \times \ln(x)}$$

2 pts **d.** Dresser le tableau de variation de la fonction g.

On étudie le signe de la dérivée :

donc $g'(x)$ s'annule si et seulement si $\ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 2$ donc pour $x = 1$ ou $x = \mathrm{e}^2$.

✗ $\ln x > 0 \iff x > 1$

✗

$$\begin{aligned} 2-\ln x>0 &\iff -\ln x>-2 \\ &\iff \ln x<2 \\ &\iff x<e^2 \end{aligned}$$

x	0			1			e^2		$+\infty$
signe de $\ln x$	||	-		0	+			+	
signe de $2-\ln x$	||	+			+		0	-	
signe de x^2	0	+			+			+	
signe de $g'(x)$	||	-		0	+		0	-	

On en déduit le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	|| $+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

✗ $g(1)=\dfrac{(\ln 1)^2}{1}=0$

✗ $g(e^2)=\dfrac{(\ln e^2)^2}{e^2}=\dfrac{(2)^2}{e^2}=4e^{-2}$

2 pts **3** **a.** Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.
Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent aux points dont les abscisses sont les solutions $f(x)=g(x)$

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\iff \ln(x)=(\ln(x))^2 \\ &\iff 0=(\ln(x))^2-\ln(x) \\ &\iff 0=\ln(x)\times(\ln(x)-1) \\ &\iff \ln(x)=0, \text{ou } \ln(x)=1 \\ &\iff x=1 \text{ ou } x=\mathrm{e} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{ce sont les deux points } A(1\ ;\ 0); B\left(\mathrm{e}\ ;\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right).}$$

1 pt **b.** Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
La position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$est donnée par l'étude du signe de $f(x)-g(x)$.
$f(x)-g(x)<0 \iff \ln(x)<(\ln(x))^2 \iff \ln(x)(1-\ln(x))<0$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0			$+$	
$(1-\ln(x))$	$\Vert$	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln(x)\times(1-\ln(x))$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$f(x)-g(x)<0 \iff \ln(x)<0\,\text{ou}\,\ln(x)>1 \iff x<1\,\text{ou}\,x>\mathrm{e}$

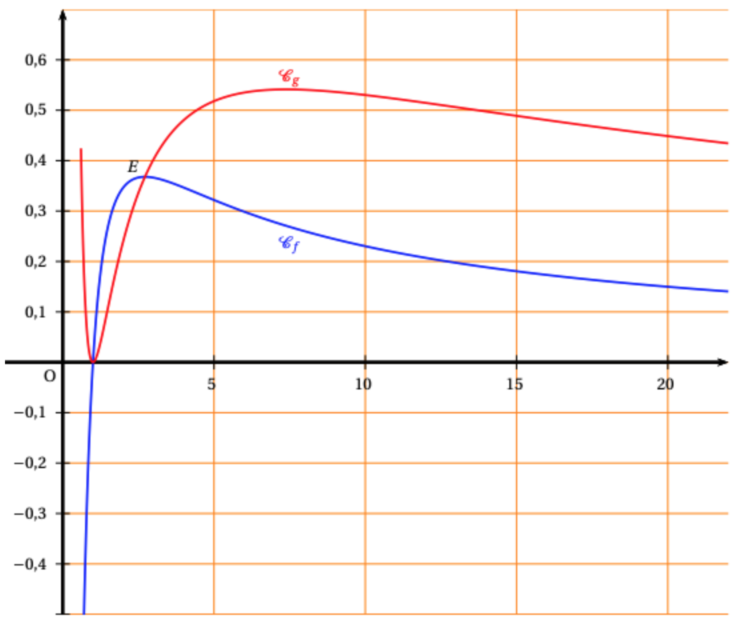
$f(x)-g(x)>0 \iff 1<x<\mathrm{e}$

La courbe de f est au dessus de la courbe de g pour $x\in]1\ ;\ \mathrm{e}[$.

La courbe de f est au dessous de la courbe de g pour $x\in]0\ ;\ 1[\cap]\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.

La courbe de f coupe la courbe de g pour $x=1$ ou pour $x=\mathrm{e}$.

1 pt **c.** Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe $\mathcal{C}_g$.



Exercice 2 — *13 points*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les points A$(1\,;2\,;\text{-}1)$, B$(-3\ ;\ -2\ ;\ 3)$ et C$(0\,;\text{-}2\,;3)$.

2 pts **1** **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

A, B et C ne sont pas alignés ssi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-1\\-2-2\\3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-1\\-2-2\\-3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\-2\end{pmatrix}$. Ayant $\dfrac{-4}{-1}\neq\dfrac{-4}{-4}$, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 pts **b.** Montrer que le vecteur $\vec{n}(2\,;\text{-}1\,;\ 1)$, est un vecteur normal du plan (ABC).

$\vec{n}(2\,;\text{-}1\,;\ 1)$, est un vecteur normal du plan (ABC) ssi $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) soit $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-4)-1\times(-4)+1\times4=-8+4+4=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-1)-1\times(-4)+1\times(-2)=-2+4-2=0\end{cases}$$

Comme $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) $\vec{n}(2\,;-1\,;\;1)$, est un vecteur normal du plan (ABC).

2 pts **2** Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $x+y-z+2=0$. Démontrer que les plans (P) et (ABC) sont perpendiculaires.

- (P) le plan dont une équation cartésienne est $x+y-z+2=0$ a pour vecteur normal $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$
- Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$
- $\vec{n}\cdot\vec{n'}=1\times 2+1\times(-1)+-1\times 1=2-1-1=0$

Les plans (P) et (ABC) ayant des vecteurs normaux orthogonaux, sont perpendculaires.

3 On appelle G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 2) c'est à dire que

$$\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

2 pts **a.** Démontrer que le point G a pour coordonnées (2 ; 0 ; -5).

Posons $G\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\\-1-z\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}-3-x\\-2-y\\3-z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}0-x\\-2-y\\-3-z\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0} \quad&\iff \begin{pmatrix}1-x\\2-y\\-1-z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3-x\\-2-y\\3-z\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0-x\\-2-y\\-3-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}1-x-1+3+x-2x=0\\2-y+2+y-4-2y=0\\-1-z-3+z-6-2z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}-2x=-4\\-2y=0\\-2z=10\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x=-2\\y=0\\z=-5\end{cases}\end{aligned}$$

On trouve bien que le point G a pour coordonnées (2 ; 0 ; −5).

1 pt **b.** Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).

La droite (CG) est orthogonale au plan (P) ssi un vecteur directeur de (CG) et un vecteur normal de (P) sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{CG}=2\vec{n'}$.

Ainsi $\overrightarrow{CG}$ et $\vec{n'}$, ce qui prouve que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).

1.5 pt **c.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (CG) &\iff \overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CG} (t \in \mathbb{R}) \\ &\iff \begin{pmatrix}x\\y+2\\z+3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 2t-2 \\ z = -2t-3 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Une représentation paramétrique de la droite (CG) est $\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 2t-2 \\ z = -2t-3 \end{array}\right.$

1 pt **d.**

Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).

$$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in (P) \cap (CG) \iff \left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 2t-2 \\ z = -2t-3 \\ x+y-z+2 = 0 (1) \end{array}\right.$$

$(1) \iff 2t+2t-2+2t+3+2 = 0 \iff 6t = -3 \iff t = -\frac{1}{2}$. En reportant dans la représentation paramétrique de (CG), on obtient

$$H(-1;-3;-2)$$

1 pt **4** **a.** Démontrer que pour tout point M de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right) \\ &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GC} \\ &= 2\overrightarrow{MG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}} \\ &= 2\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

0.5 pt **b.** Déterminer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que

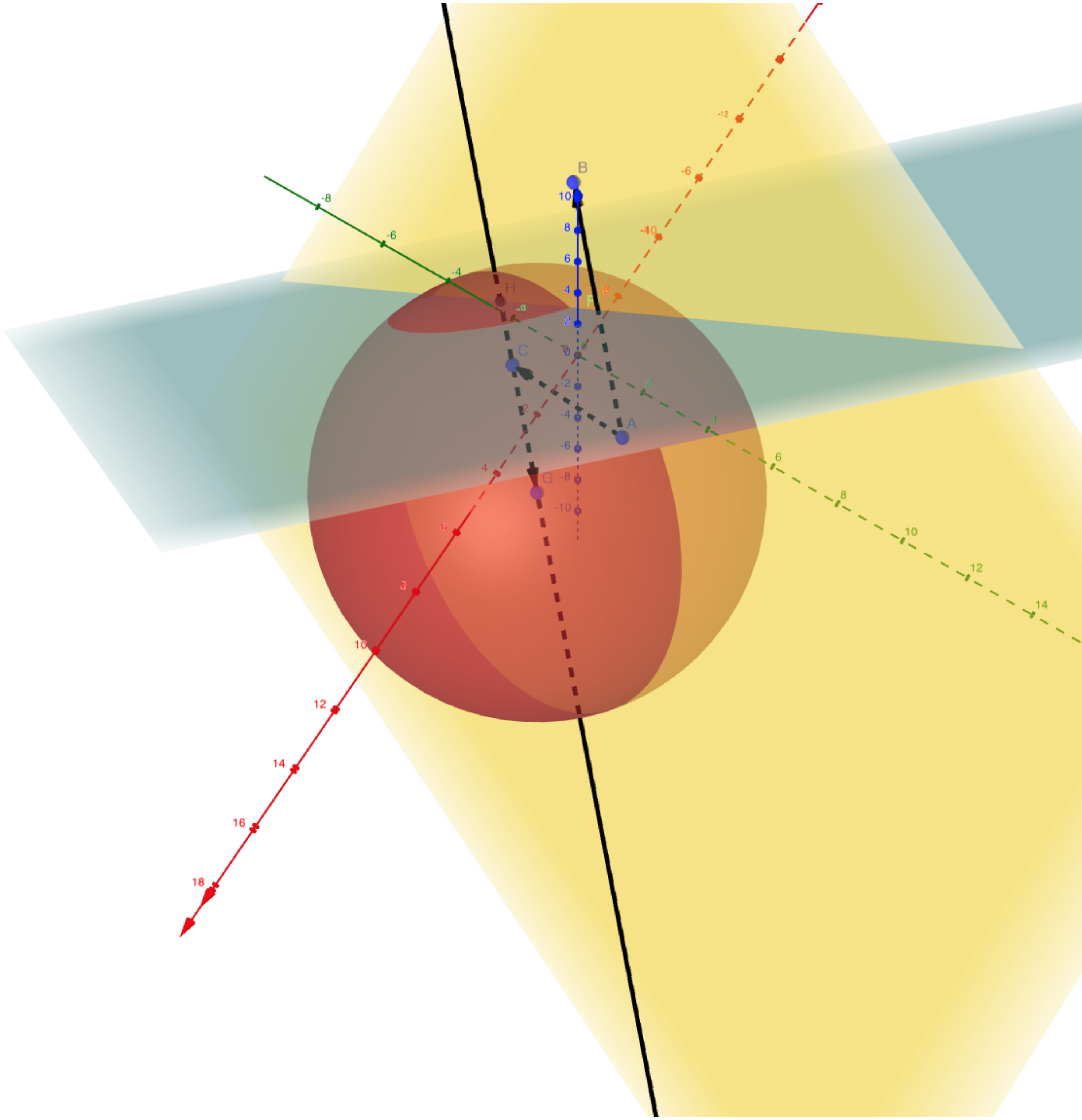
$$\left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = 12$$

(on précisera les éléments caractéristiques)

$$\begin{aligned} M \in (S) &\iff \left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = 12 \\ &\iff 2MG = 12 \\ &\iff MG = 6 \end{aligned}$$

L'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = 12$ est la sphère de centre G de rayon 6.

Une figure faite avec GeoGebra :



Exercice 3 — 7 points

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - 2y = \mathrm{e}^{3x}.$$

1.5 pt **1** Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
$u = ab$ où $a(x) = x$ et $b(x) = e^{2x}$
ainsi $a'(x) = 1$ et $b'(x) = 2e^{2x}$

$$u'(x) = 1 \times e^{2x} + (2e^{2x}) \times x = (1+2x)e^{2x}$$

On forme alors $u'(x) - 2u(x) = (1+2x)e^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}$

ayant $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) - 2u(x) = e^{2x}$, u est une solution de l'équation différentielle (E).

1.5 pt **2** On considère l'équation différentielle (E') : $y' - 2y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E').

$y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$.
(E') est du type $y' = ay$; les solutions de (E') sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$y = Ce^{2x}$ où C désigne une constante réelle quelconque.

1 pt **3** Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

Soit v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E').
On sait que u est une solution particulière de l'équation (E) ;
on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}; u'(x) - 2u(x) = e^{2x}$ ou encore
$\forall x \in \mathbb{R}; e^{2x} = u'(x) - 2u(x)$
D'où la chaîne d'équivalence :

$$\begin{aligned}
v \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v'(x) - 2v(x) = e^{2x} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; u'(x) - 2u(x) = v'(x) - 2v(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v'(x) - u'(x) = -2v(x) + 2u(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (v-u)'(x) - 2(v-u)(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (v-u)' - 2(v-u) = 0 \\
&\Leftrightarrow (v-u) \text{ est solution de} (E')
\end{aligned}$$

1.5 pt **4** En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

$$\begin{aligned}
v \text{ est solution de} (E) &\Leftrightarrow (v-u) \text{ est solution de} (E') \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (v-u)(x) = Ce^{2x} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v(x) - u(x) = Ce^{2x} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v(x) = u(x) + Ce^{2x} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v(x) = xe^{2x} + Ce^{2x}
\end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par

$v(x) = (x+C)e^{2x}$ où C désigne une constante réelle arbitraire.

1.5 pt **5** Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 1$.

$g(0) = 1 \Leftrightarrow (C+0)e^0 = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Ainsi l'unique solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = 1$ est définie par

$$g(x) = (x+1)e^{2x}$$

Exercice 4 — 6 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1,5 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Question 1

1.5 pt

On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n : $u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $v_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$.

On peut affirmer que :

a. les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

Comme $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$; et pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leq v_n \leq w_n$; le théorème des gendarmes s'applique et

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$; la bonne réponse est **b.**

Question 2

1.5 pt

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 4x\mathrm{e}^{2x}$.
b. $f'(x) = \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{e}^{2x}$.
c. $f'(x) = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{2x}$.
d. $f'(x) = \left(2x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{2x}$.

f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans $\mathbb{R}$:

$\begin{cases} u(x) &= x^2 \\ v(x) &= \mathrm{e}^{2x} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2x \\ v'(x) &= 2\mathrm{e}^{2x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2x} \times x^2 \\ &= \left(2x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

$= \left(2x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{2x}$, la bonne réponse est **d.**

Question 3

1.5 pt

Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 2x}$

a. -1
b. 0
c. 1
d. $+\infty$

On peut écrire $f(x) = \dfrac{x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(-1 + \frac{2}{x}\right)} = \dfrac{\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x}\right)}{\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}$

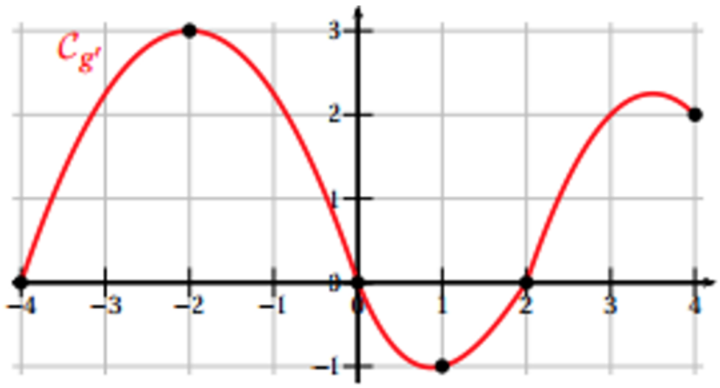
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -1 + \frac{2}{x} = -1 \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 2x} = -1$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 2x} = -1$; la bonne réponse est **a.**

Question 4

1.5 pt

On suppose que g est une fonctiondeux fois dérivable sur l'intervalle $[-4;4]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée g' .



On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

d. g admet un minimum en 0.

D'après le graphique,g' est croissante sur $[1;2]$, comme g est deux fois dérivable on déduit que g' est dérivable, et que sa dérivée est positive sur $[1;2]$.
Ainsi pour tout réel x de $[1;2]$ on a $g''(x) \geq 0$.

Comme pour tout réel x de $[1;2]$ on a $g''(x) \geq 0$, g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. La bonne réponse est **c.**