Lycée l'Oiselet **1er Avril 2021**

DEVOIR COMMUN 2021
DE MATHÉMATIQUES
– Spécialité Maths –

Durée de l'épreuve : 2 HEURES

Les calculatrices sont AUTORISÉES

Les calculatrices sont autorisées.

Le candidat doit traiter les quatre exercices en commençant par le quatrième qui sera ramassé au bout de 30 minutes.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- *le nom de votre groupe : TMATHS1 ou TMATHS2 ou $\cdots$.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages.

Exercice 1 — 18 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}\right)$.

1 Étude d'une fonction f On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}\right)$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

1.5 pt **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

1 pt **b.** Interpréter graphiquement les résultats.

1 pt **c.** Calculer la dérivée f' de la fonction f.

2 pts **d.** En déduire les variations de la fonction f.

2 pts **e.** Montrer que l'équation $f(x)=0,3$ admet une solution unique α dans $[e;+\infty[$. Donner une valeur approchée au dixième de cette solution.

2 Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère$\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath}\right)$.

2.5 pts **a.** Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

1 pt **b.** Interpréter graphiquement les résultats.

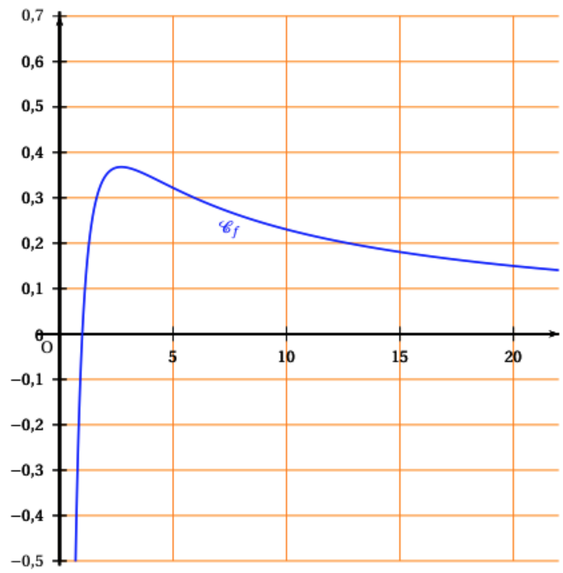
1 pt **c.** Calculer la dérivée g' de la fonction g.

2 pts **d.** Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3 pts **3** **a.** Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. On précisera les coordonnées des points d'intersection.

1 pt **b.** Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe $\mathcal{C}_g$.

Annexe 1
Nom , prénom :
Groupe :



Exercice 2 — *13 points*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on donne les points A(1 ; 2 ; −1), B(−3 ; −2 ; −3) et C(0 ; −2 ; 3).

2 pts **1** **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 pts **b.** Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; -1; 1)$, est un vecteur normal du plan (ABC).

2 pts **2** Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $x+y-z+2=0$. Démontrer que les plans (P) et (ABC) sont perpendiculaires.

3 Soit G le point de l'espace vérifiant :

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

2 pts **a.** Démontrer que le point G a pour coordonnées (2 ; 0 ; −5).

1 pt **b.** Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).

1.5 pt **c.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

1 pt **d.** Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).

1 pt **4** **a.** Démontrer que pour tout point M de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$$

0.5 pt **b.** Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que

$$\left\|2\overrightarrow{MG}\right\| = 12$$

(on précisera les éléments caractéristiques)

Exercice 3 — 7 points

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \quad y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}.$$

1.5 pt **1** Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

1.5 pt **2** On considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}') : y' - 2y = 0$. Résoudre l'équation différentielle (E′).

1 pt **3** Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E′).

1.5 pt **4** En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

1.5 pt **5** Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 1$.

Exercice 4 — 6 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Le candidat complètera le tableau de la page 6 qui sera ramassé 30 minutes apès le début de l'épreuve. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1,5 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Question 1

1.5 pt

On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n : $u_n = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ et $v_n = 1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$.

On peut affirmer que :

a. les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

Question 2

1.5 pt

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 4x\mathrm{e}^{2x}$.
b. $f'(x) = \left(x^2 - 2x\right)\mathrm{e}^{2x}$.
c. $f'(x) = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{2x}$.
d. $f'(x) = \left(2x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{2x}$.

Question 3

1.5 pt

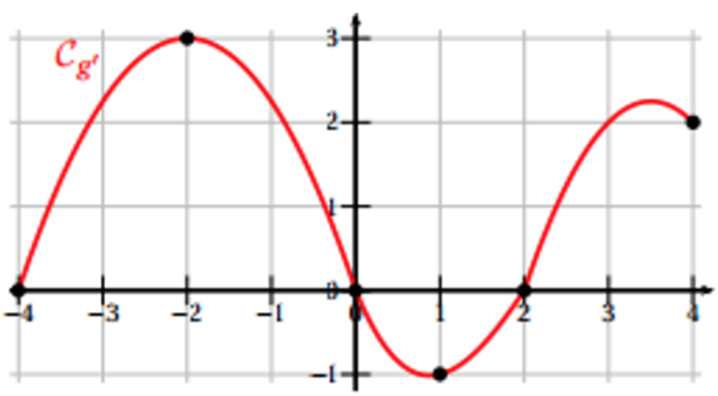
Que vaut $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{-x^2 + 2x}$

a. -1
b. 0
c. 1
d. $+\infty$

Question 4

1.5 pt

On suppose que g est une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4;4]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.



On peut affirmer que :
a. g admet un maximum en -2.
b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;2]$.
c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;2]$.
d. g admet un minimum en 0.

✄ ✄

A rendre au bout de 30 minutes.

Nom , prénom :

Groupe :

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4
Réponse				