Nom :	**DS 07**	TMATHS3 — Mars. 2021
Prénom :		Devoir n° .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 0 point

Soit (E) l'équation différentielle $y' = \sqrt{2}y$.

1 Déterminer toutes les solutions de cete équation.
Cete équation est du type $y' = ay$ où $a = \sqrt{3}$. Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f(x) = Ce^{\sqrt{2}x} \text{ avec } C \text{ qui désigne une constante réelle quelconque.}}$$

2 Déterminer toutes les solutions de cete équation qui vérifient $y(2) = 3$.
On a $y(2) = 3 \Longleftrightarrow Ce^{2\sqrt{2}} = 3 \Longleftrightarrow C = 3e^{-2\sqrt{2}}$.
La seule solution de cete équation qui vérifie $y(2) = 3$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f(x) = 3e^{-2\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x} = 3e^{\sqrt{2}(x-2)}}$$

Exercice 2 — 0 point

Soit (E_1) l'équation différentielle $y' = -5y + 3$.

1 Déterminer toutes les solutions de cete équation.
Cette équation est du type $y' = ay + b$; les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f(x) = Ce^{-5x} + \frac{3}{5} \text{ avec } C \text{ qui désigne une constante réelle quelconque.}}$$

2 Déterminer toutes les solutions de cete équation qui vérifient $y(0) = 2$.
On a $y(0) = 2 \Longleftrightarrow Ce^{0} + \frac{3}{5} = 2 \Longleftrightarrow C = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$.
La seule solution de cete équation qui vérifie $y(0) = 2$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f(x) = \frac{7}{5}e^{-5x} + \frac{3}{5}}$$

Exercice 3 — 0 point

Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = -5$
On met cette équation sous la forme $y' = ay + b$.
$2y' + 3y = -5 \Longleftrightarrow 2y' = -3y - 5 \Longleftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y - \frac{5}{2}$.
Les solutions sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{f(x) = -\frac{5}{3} + Ce^{-\frac{3}{2}x} \text{ avec } C \text{ qui désigne une constante réelle quelconque.}}$$

Exercice 4 — 0 point

$(E) : y' - 3y = \mathrm{e}^{3x}$

1 u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
$u = ab$ où $a(x) = x$ et $b(x) = e^{3x}$
ainsi $a'(x) = 1$ et $b'(x) = 3e^{3x}$

$$a'(x) = 1 \times e^{3x} + (3e^{3x}) \times x = (1+3x)e^{3x}$$

On forme alors $u'(x) - 3u(x) = (1+3x)e^{3x} - 3xe^{3x} = e^{3x}$

$$\boxed{\text{ayant } \forall x \in \mathbb{R}, u'(x) - 3u(x) = e^{3x}, u \text{ est une solution de l'équation différentielle } (E).}$$

2 Résoudre (E')
$y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y \Leftrightarrow y' = 3y$.
(E') est du type $y' = ay$; les solutions de (E') sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{y = Ce^{3x} \text{ où } C \text{ désigne une constante réelle quelconque.}}$$

3 Soit v une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que v est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E').
On sait que u est une solution particulière de l'équation (E) ;
on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}; u'(x) - 3u(x) = e^{3x}$ ou encore
$\forall x \in \mathbb{R}; e^{3x} = u'(x) - 3u(x)$
D'où la chaîne d'équivalence :

$$\begin{aligned}
v \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v'(x) - 3v(x) = e^{3x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; u'(x) - 3u(x) = v'(x) - 3v(x)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v'(x) - u'(x) = -3v(x) + 3u(x)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (v-u)'(x) - 3(v-u)(x) = 0\\
&\Leftrightarrow (v-u)' - 3(v-u) = 0\\
&\Leftrightarrow (v-u) \text{ est solution de} (E')
\end{aligned}$$

4 En déduire les solutions de (E).

$$\begin{aligned}
v \text{ est solution de} (E) &\Leftrightarrow (v-u) \text{ est solution de} (E')\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (v-u)(x) = Ce^{3x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v(x) - u(x) = Ce^{3x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v(x) = u(x) + Ce^{3x}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; v(x) = xe^{-x} + Ce^{3x}
\end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{v(x) = (x+C)e^{3x} \text{ où } C \text{ désigne une constante réelle arbitraire.}}$$

5 $g(0) = 2 \Leftrightarrow (C+0)e^0 = 2 \Leftrightarrow C = 2$.
Ainsi l'unique solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = 2$ est définie par

$$g(x) = (x+2)e^{3x}$$

Exercice 5 — 4 points

2 pts **1** Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$: $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.

On réduit $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$ au même dénominateur :

$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{a(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} + \frac{bx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} + \frac{cx(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$

$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{ax^2-a}{x(x-1)(x+1)} + \frac{bx^2-bx}{x(x-1)(x+1)} + \frac{cx^2+cx}{x(x-1)(x+1)}$

$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{ax^2-a+bx^2-bx+cx^2+cx}{x(x-1)(x+1)}$

$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x-1)(x+1)}$

Comme $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x-1)(x+1)}$.

On a en identifiant les polynômes du numérateur :

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ c-b &= 0 \\ -a &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -1 \\ b &= \frac{1}{2} \\ c &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}.}$$

1.5 pt **2** Trouver une primitive H de g sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

On utilise le fait que $\frac{u'}{u}$ a pour primitives $\ln|u| + C$.

$$\boxed{\text{Ainsi } H(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C}$$

0.5 pt **3** Déterminer la primitive G de g qui vérifie $G(2) = 0$.

$G(2) = 0 \iff -\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 1 + C = 0$

Soit $C = -\frac{1}{2}\ln 3 + \ln 2 = -\frac{1}{2}(\ln 3 - 2\ln 2) = \frac{1}{2}(2\ln 2 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln(\frac{4}{3})$

Conclusion : La primitive de g qui vérifie $G(2) = 0$ est donc la fonction définie par

$$G(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(\frac{4}{3})$$

Soit comme ici $x > 1$

$$\boxed{G(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$