Nom :	**DS 05**	TMATHS3 Janv. 2021
Prénom :		Devoir n° 08 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises****.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *8,5 points*

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

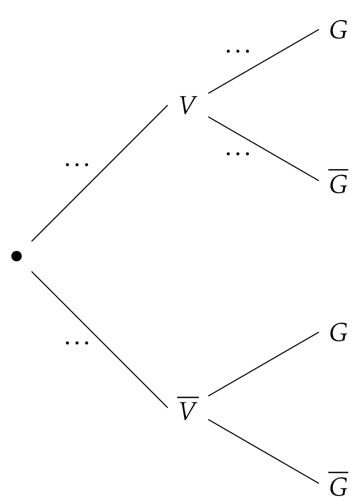
On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

0.5 pt **1** **a.** Donner la probabilité de l'évènement G.

1.5 pt **b.** Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



1 pt **2** Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

2 pts **3** La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à $0,4$.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1.5 pt **1** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

2 Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

1 pt **a.** Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

1 pt **b.** Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

Exercice 2 — *6 points*

On donne les points $A(5;2;1), B(7;3;1), C(-1;4;5)$ et $D(-3;3;5)$.

0.5 pt **1** Calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

2 pts **2** Démontrer que A, B, C, D sont coplanaires.

1 pt **3** Les droites (AC) et (BD) sont -elles parallèles ? Justifier.

1 pt **4** Donner un représentation paramétrique de la droite (AB).

1.5 pt **5** On note Δ la droite de représentation partamétrique : $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$

Etudier la position relative de Δ et (AB).

Exercice 3 — *4 points*

2 pts

1 Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants :

$\ln 8$; $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$; $\ln(16\mathrm{e})$; $\ln(\sqrt{2})$

2 pts **2** $\ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln(x+5)$

Exercice 4 — *11 points*

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1 pt **1** Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

2 pts **2** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : encadrement de la solution α
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

1 Étude de quelques propriétés de la fonction g.

1.5 pt **a.** Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

1 pt **b.** En déduire que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

1 pt **c.** Démontrer qu'un nombre réel $x \in]0\ ;\ +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.

2 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.

2.5 pts **a.** En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

1 pt **b.** En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3 Recherche d'une valeur approchée de α

0.5 pt **a.** à l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.

0.5 pt **b.** On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.