Nom :	**DS 04**	TMATHS3 Déc. 2020
Prénom :		Devoir n° 07 .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 6,5 points

6.5 pts

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,7$.
Calculer la probabilité

1. $P(X = 7)$
2. $P(X \leqslant 7)$
3. $P(X \geqslant 7)$
4. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 2 — 9 points

9 pts

Un avion a une capacité de 100 personnes. On considère que la probabilité qu'une personne qui a réservé son billet ne se présente pas à l'embarquement est de 5%.

1. 100 billets, un par place, ont été vendus.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui se présentent à l'embarquement.
   - **a.** Préciser pourquoi X suit une loi binomiale, et en donner les paramètres.
   - **b.** Calculer la probabilité que l'avion soit plein.
   - **c.** Calculer la probabilité pour qu'il reste au moins une place libre dans cet avion.
   - **d.** Calculer la probabilité qu'il y ait strictement moins de 96 personnes dans l'avion.
2. Comme on estime que la probabilité que cet avion ne soit pas plein est importante, on décide de vendre 105 billets pour ce vol.
   Calculer la probabilité qu'aucun client ne se retrouve sans place.

Exercice 3 Vrai ou Faux — 6 points

6 pts Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ telle que :

- la fonction g est dérivable et strictement décroissante sur $[0\,;1]$.
- Ona :$g(0) = 5$ et $g(1) = 2$.

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = (g(x))^2$$

Alors l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α sur $[0;1]$.

Affirmation 2

Soit m un réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -x^2 + m & \text{si } x \leqslant 3 \\ h(x) = -2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction h n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, quelle que soit la valeur de m.

Exercice 4 Une étude de fonction — 18.5 points

9 pts **Partie A : étude d'une fonction auxiliaire** On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

1. Etudier le sens de variation de g .
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α , dans l'intervalle $[-2;-1]$.
3. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
4. Compléter l'algorithme de dichotomie donné ci dessous qui permet d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. On partira d'un intervalle $[a;b]$ contenant α, avec a et b entiers.
   L'algorithme permet d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}, où α est la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a;b]$ (à préciser).

   Pseudo Code

   # $[a;b]$ un intervalle de départ qui contient la solution α avec $a < b$.

   ```
   Fonction Dichotomie() :
   a ← ···
   b ← ···
   Tant que b − a > ······ Faire
       m ← ···
       Si f(a) × f(m) < 0 Alors
           ··· ← ···
       Sinon
           ··· ← ···
   Fin Tant que Afficher (a, b)
   ```

5. Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

7 pts **Partie B : Etude des variations de f**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2+1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. .

1. Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$, et montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

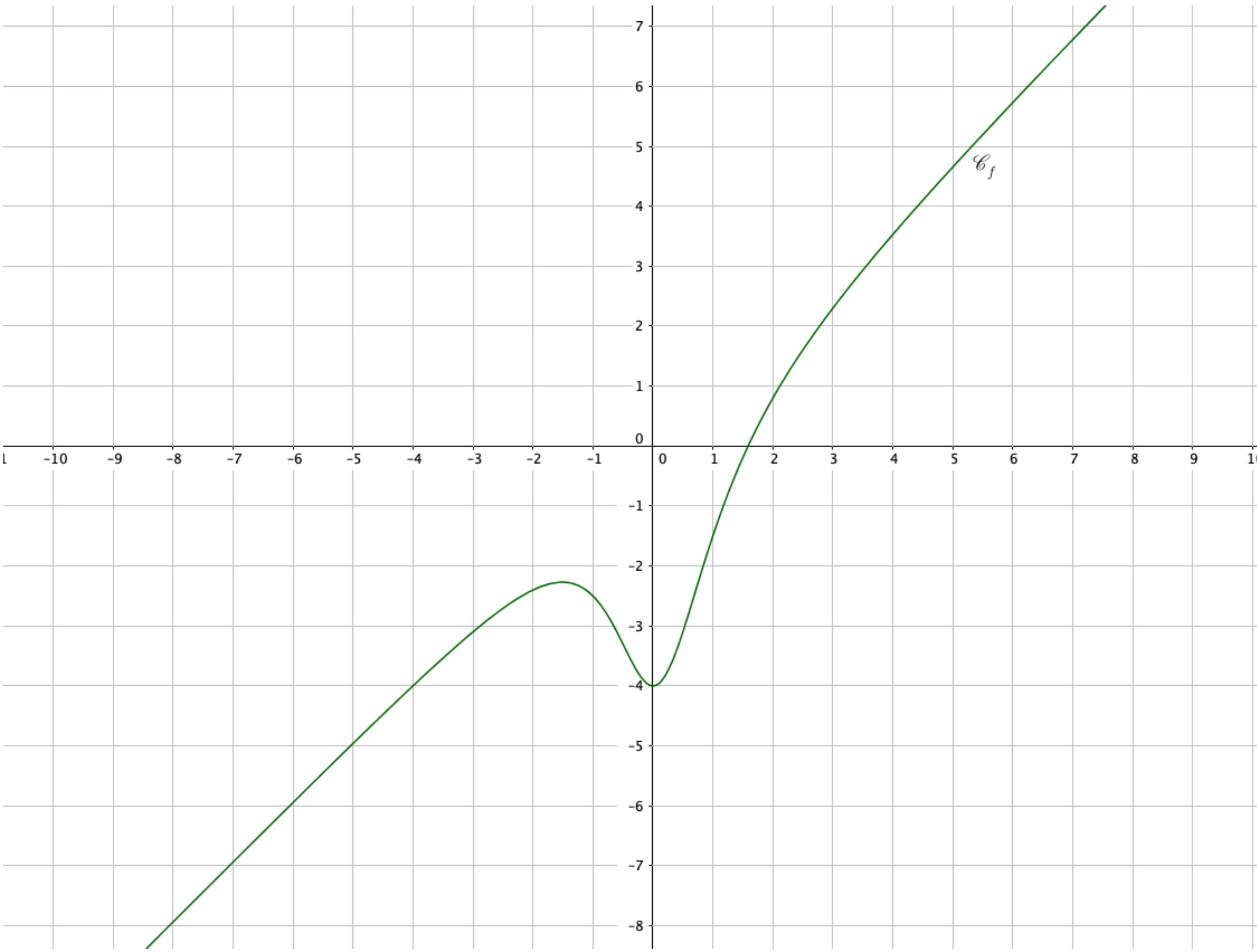
3. Etudier les variations de f . *On pourra utiliser les résultats de la partie A.*
4. Démontrer que :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{3}{2}$$

5. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

2.5 pts **Partie C : un problème de tangente**

On donne ici $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.



1 Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2 Conjecturer graphiquement la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T. Valider votre conjecture par le calcul.