Nom :	DS 04	TMATHS3 — Déc. 2020
Prénom :		Devoir n° 07 — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 6,5 points

6.5 pts

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,7$.
Calculer la probabilité

1 [2nd] [DISTR] [A] [binomFdp(] [.] [,] [.] [,] [.] [)]
$binomFdp(10, 0.7, 7) \approx 0.2668$ Ceci calcule $P(X = 7)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.7)$

$$\boxed{P(X = 7) \approx 0,2668}$$

2 [2nd] [DISTR] [B] [binomFRép(] [.] [,] [.] [,] [.] [)]
binomFRép$(10, 0.7, 7) \approx 0,6172$ Ceci calcule $P(X \leq 7)$ dans le cas où X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.7)$

$$\boxed{P(X \leqslant 7) \approx 0,6172}$$

3 $P(X \geqslant 7)$

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 7) &= 1 - P\left(\overline{X \geqslant 7}\right) \\ &= 1 - P(< 7) \\ &= 1 - P(X \leqslant 6) \\ &= 1 - \text{ BinomFRép}(10, 0.7, 6) \\ &\approx 0,6496 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geqslant 7) \approx 0,6496}$$

4 Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

> **Propriété 1**
>
> Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n; p)$ alors $E(x) = np$ et $Var(X) = npq$.

Ici $E(x) = n \times p = 10 \times 0,7 = 7$ et $Var(X) = 10 \times 0,7 \times (1 - 0,7) = 2,1$.

$$\boxed{E(x) = 7 \text{ et } Var(X) = 2,1.}$$

Exercice 2 — 9 points

9 pts

Un avion a une capacité de 100 personnes. On considère que la probabilité qu'une personne qui a réservé son billet ne se présente pas à l'embarquement est de 5%.

1 100 billets, un par place, ont été vendus.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui se présentent à l'embarquement.

a. Préciser pourquoi X suit une loi binomiale, et en donner les paramètres.
On répète $n = 100$ fois l'épreuve de Bernoulli : un client au hasard se présente ou non à l'embarquement, dont le succès est S :"le client se présente" de probabilité 95%=0,95.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès, c'est-à-dire au nombre de personnes dans l'avion, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,95$.

$$\boxed{X \text{ suit } \mathcal{B}(100, 0.95)}$$

b. Calculer la probabilité que l'avion soit plein.

$$\boxed{\text{La probabilité que l'avion soit plein est } P(X = 100) = 0,95^{100} \simeq 0,0059 \simeq 0,59\%.}$$

L'avion a donc très peu de chance d'être plein !

c. Calculer la probabilité pour qu'il reste au moins une place libre dans cet avion.
La probabilité pour qu'il reste des places libres dans cet avion est

$$\boxed{P(X < 100) = 1 - P(X = 100) \simeq 99,41\%.}$$

C'est l'événement contraire de la question précédente : il y a de très fortes chances pour que l'avion ne soit pas plein !

d. Calculer la probabilité qu'il y ait strictement moins de 96 personnes dans l'avion.

La probabilité qu'il y ait strictement moins de 96 personnes dans l'avion est, avec la calculatrice

$P(X < 96) = P(X \leqslant 95) \simeq 0,564 \simeq 56\%$.
Il ya donc plus d'une chance sur deux pour qu'il y ait plus de 5 places libres dans cet avion.

2 Comme on estime que la probabilité que cet avion ne soit pas plein est importante, on décide de vendre 105 billets pour ce vol.
Calculer la probabilité qu'aucun client ne se retrouve sans place.

Comme on estime que la probabilité que cet avion ne soit pas plein est importante, on décide de vendre 105 billets pour ce vol.
On reprend le raisonnement précédent, en notant Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui se présentent à l'embarquement, et qui suit maintenant la loi binomiale de paramètres $n = 105$ et $p = 0,95$.
La probabilité qu'aucun client ne se retrouve sans place est la probabilité que moins de 100 personnes ne se présentent à l'embarquement, soit $P(Y \leqslant 100) \simeq 0,608$.

En vendant 5 billets supplémenaires (c'est ce qu'on appelle du *surbooking*), il a presque deux chances sur trois pour que personne ne soit lésé en se retrouvant sans place dans l'avion.

Exercice 3 Vrai ou Faux

6 points

6 pts

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ telle que :

- la fonction g est dérivable et strictement décroissante sur $[0; 1]$.
- Ona :$g(0) = 5$ et $g(1) = 2$.

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = (g(x))^2$$

Alors l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α sur $[0;1]$.

Corrigé 1

✍ f est dérivable sur $[0;1]$. La fonction g est définie et dérivable sur $[0;1]$ donc f l'est aussi d ?après le cours car de la forme g^2 . Pour x de[$0;1]$ on a :

$$f'(x) = 2g(x) \times g'(x)$$

✍ g est positive sur $[0\,;\,1]$.

La fonction g est strictement décroissante sur $[0;1]$ (et continue car dérivable) donc elle admet comme minimum $g(1) = 2$ et on obtient :

x	0	1
$g'(x)$	$-$	
Variations de g	$5 \searrow$	2

De ce fait g est strictement positive sur $[0\,;\,1]$ et donc f' est du signe de g'.

✍ Variations de f sur $[0;1]$:
Puisque g est décroissante, g' est strictement négative ce qui nous donne le signe de f' et donc les variations de f qui est aussi décroissante sur $[0\,;\,1]$:

x	0	1
$f'(x) = 2g(x) \times g'(x)$	$-$	
Variations de f	$f(0) = g(0)^2 = 25 \searrow$	$f(1) = g(1)^2 = 4$

✍ f continue sur $[0\,;\,1]$. ?
Pour appliquer le théorème de la bijection, il reste à montrer que f est continue. Cela est acquis car on a montré que f était dérivable sur $[0\,;\,1]$.

✍ D'après le théorème de la bijection :

- ✔ f est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $[0;1]$.
- ✔ f est strictement décroissante sur l' intervalle $[0;1]$.
- ✔ $f(0) = 25$ et $f(1) = 4$
- ✔ f réalise donc une bijection de $[0;1]$ sur $[4;25]$
  6 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$, en effet $f(0) > 25$ et $f(1) < 6$
  donc l'équation $f(x) = 6$ a une racine unique α dans $[0;1]$.

Conclusion : l'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2

Soit m un réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -x^2 + m & \text{si } x \leqslant 3 \\ h(x) = -2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

La fonction h n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, quelle que soit la valeur de m.

Corrigé 2

- Sur chacun des intervalles $]-\infty;3[$ et $]3;+\infty[$ f est continue car c'est un polynome.
- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} -x^2 + m = m - 9$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} -2x - 1 = -2\times 3 - 1 = -7$
- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \iff m - 9 = -7 \iff m = 2$
  Ainsi pour $m = 2$, on a $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2 = f(3)$, donc la fonction f est continue en 3, et donc f sera continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : l'affirmation 2 est fausse.

Exercice 4 Une étude de fonction — *18,5 points*

9 pts

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire On pose $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

1 Etudier le sens de variation de g .
g est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = 3x^2 + 3$.
Pour tout réel x on a $x^2 \geq 0$, donc en multipliant par 3>0, $3x^2 \geq 0$ puis $3x^3 + 3 \geq 3 > 0$.
Ainsi pour tout x réel on a $g'(x) > 0$.

Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2 Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α , dans l'intervalle $[-2;-1]$.

On déduit le tableau de variations de g sur $]-\infty;+\infty[$:

x	$-\infty$	-2	α	-1	$+\infty$
$g'(x)$			+		
Variations de g	$-\infty$ ↗	-6 ↗	0 ↗	4 ↗	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection :

- g est une fonction dérivable (donc continue) sur l' intervalle $[-2;-1]$.

✍ g est strictement croissante sur l' intervalle $[-2;-1]$.

✍ $g(-2) = -6$ et $g(-1) = 4$

✍ g réalise donc une bijection de $[-2;-1]$ sur $[-6;4]$
0 est compris entre $g(-2)$ et $g(-1)$, en effet $g(-2) < 0$ et $g(-1) > 0$

$$\boxed{\text{donc l'équation } g(x) = 0 \text{ a une racine unique } \alpha \text{ dans } [-2;-1]\,.}$$

3 Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
A l'aide d'une calculatrice, on obtient : $g(-1,52) \approx -0,0752$ et $g(-1,51) \approx 0,027$
donc

$$g(-1,52) < 0 < g(-1,51)$$

$$g(-1,52) < g((\alpha) < g(-1,51)$$

$$\boxed{-1,52 < \alpha < -1,51}$$

car g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4 Compléter l'algorithme de dichotomie donné ci dessous qui permet d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}. On partira d'un intervalle $[a;b]$ contenant α, avec a et b entiers.
L'algorithme permet d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}, où α est la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a;b]$ (à préciser).

Pseudo Code

$[a;b]$ un intervalle de départ qui contient la solution α avec $a < b$.

```
Fonction Dichotomie() :
Renvoie l'indice du terme qui dépasse 390
a ← −2
b ← −1
Tant que b − a > 0,01 Faire
        m ← (a + b)/2
        Si f(a) × f(m) < 0 Alors
                b ← m
        Sinon
                a ← m
Fin Tant que Afficher (a, b)
```

5 Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	
Variations de g		↗	0	↗	
Signe de $g(x)$		-	0	+	

7 pts **Partie B : Etude des variations de f**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1 Démontrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x on a $x^2 \geq 0$, donc $x^2+1 \geq 1 > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } x^2+1 \text{ ne s'annule pas et } f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

2 Calculer $f'(x)$, et montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
$f = \frac{u}{v}$ d'où $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x dans $\mathbb{R}$:
$\begin{cases} u(x) &= x^3-4 \\ v(x) &= x^2+1 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 3x^2 \\ v'(x) &= 2x \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-4)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{3x^4+3x^2-2x^4+8x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien } f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}.}$$

3 Etudier les variations de f . *On pourra utiliser les résultats de la partie A.*

✍ On étudie le signe de la dérivée :
Le dénominateur est le carré d'un réel non nul ; il est donc strictement positif.
Le signe de $g(x)$ a été étudié à la partie A.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
signe de x		-	0	+		+	
signe de $g(x)$		-		-	0	+	
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	

✍ On dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	-4	↗	$+\infty$

4 Démontrer que :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(\alpha)}{\alpha} &= \frac{1}{\alpha} \times \frac{\alpha^3 - 4}{\alpha^2 + 1} \\
&= \frac{\alpha^3 - 4}{\alpha(\alpha^2 + 1)} \\
&= \frac{\color{red}{\alpha^3} - 4}{\alpha^3 + \alpha} \\
&= \frac{\color{red}{-3\alpha - 8} - 4}{\color{red}{-3\alpha - 8} + \alpha} \qquad \text{car } g(\alpha) = 0 \text{ donne } \alpha^3 + 3\alpha + 8 = 0 \text{ donc } \color{red}{\alpha^3 = -3\alpha - 8} \\
&= \frac{-3\alpha - 12}{-2\alpha - 8} \\
&= \frac{-3(\alpha + 4)}{-2(\alpha + 4} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

5 En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

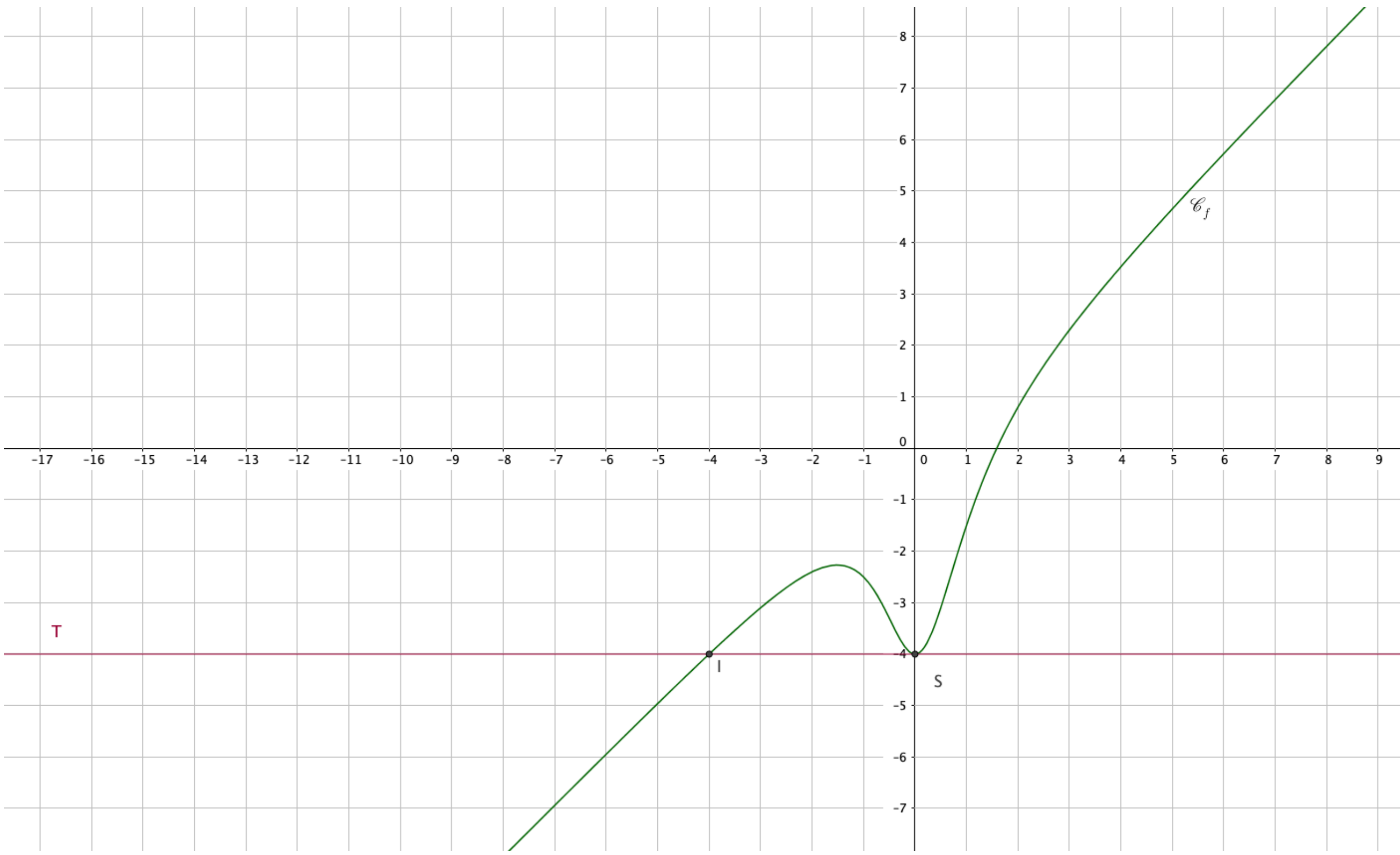
Déjà $\frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{3}{2}$ donc $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

$$\begin{aligned}
-1,52 < \alpha < -1,51 & \quad \text{Vu à la Partie A} \\
1,5 \times (-1,52) < 1,5 \times \alpha < 1,5 \times (-1,51) & \quad \text{en multipliant par 1,5>0} \\
-2,28 < f(\alpha) < -2,265 &
\end{aligned}$$

$$\boxed{-2,28 < f(\alpha) < -2,265}$$

2.5 pts **Partie C : un problème de tangente**

On donne ici $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.



1 Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

- ✏ $f'(0) = 0$
- ✏ $f(0) = -4$

$$\boxed{T \text{ a pour équation } y = -4}$$

2 Conjecturer graphiquement la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T. Valider votre conjecture par le calcul.
Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T on forme $f(x) - (-4) = y_{\mathscr{C}_f} - y_T$,

$$\begin{aligned} y_{\mathscr{C}_f} - y_T &= f(x) + 4 \\ &= \frac{x^3-4}{x^2+1} + \frac{4x^2+4}{x^2+1} \\ &= \frac{x^3 - 4 + 4x^2 + 4}{x^2+1} \\ &= \frac{x^3+4x^2}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2(x+4)}{x^2+1} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
signe de x^2		+		+	0	+	
signe de $x+4$		-	0	+		+	
signe de x^2+1		+		+		+	
signe de $f(x)+4$		-	0	+	0	+	

- $\mathscr{C}_f$ et T ont deux points communs$I(-4;-4)$ et $S(0;-4)$.
- Sur $]-\infty;-4[$ on a $f(x)+4<0$, donc $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous de T.
- Sur $]-4;+\infty[$ on a $f(x)+4 \geq 0$, donc $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de T.