Nom : .... *Prénom :*	**DS 03** CASE DES MATHS	TMATHS3 *Nov. 2020* *Devoir n° 05* .../...

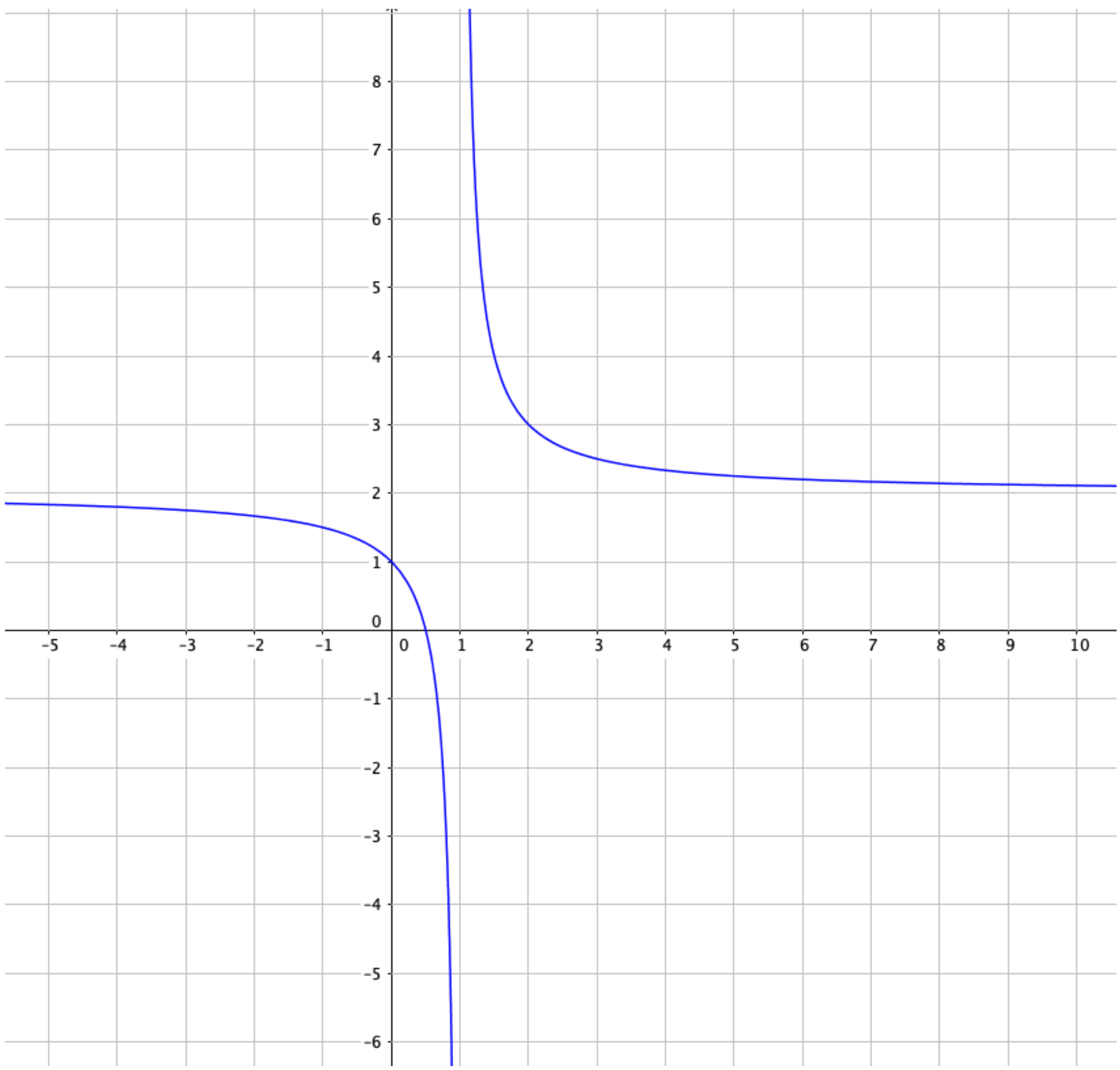
Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — *10,5 points*

10.5 pts

Voici la courbe d'une fonction f définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.



1 Lire sur le graphique les limites de la fonction f en $-\infty, +\infty$, à droite et à gauche en 1.
On lit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
Par ailleurs $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

2 La fonction représentée est la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Déterminer par le calcul les limites lues sur le graphique.

✍ En $-\infty$, on écrit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1} = \dfrac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} (2-\frac{1}{x}) = 2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Par quotient } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

✍ En $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (2-\frac{1}{x}) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Par quotient } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

✍ En 1^+ ; on utilise l'écriture $f(x) = (2x-1) \times \dfrac{1}{x-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^+} (2x-1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to1^+} x-1 = 0^+ \quad \text{Par inverse } \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$

✍ En 1^- ; on utilise l'écriture $f(x) = (2x-1) \times \dfrac{1}{x-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1^-} (2x-1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to1^-} x-1 = 0^- \quad \text{Par inverse } \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit } \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

3 Etudier la convexité de la fonction f .
On étudie le signe de la dérivée seconde.
f est dérivable sur D_f comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
$f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans D_f : $\begin{cases} u(x) &= 2x-1 \\ v(x) &= x-1 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2 \\ v'(x) &= 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-1)-1(2x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{2x-2-2x+1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} = -(x-1)^{-2}$, donc $f''(x) = -1 \times -2(x-1)^{-3} \times 1 = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de 2		+		+	
signe de $(x-1)^3$		-	0	+	
signe de $f''(x)$		-	‖	+	

$f''(x) < 0$ sur $]-\infty;1[$, f est donc concave sur $]-\infty;1[$
$f''(x) < 0$ sur $]1;+\infty[$, f est donc convexe sur $]1;+\infty[$

4 La courbe de f admet-elle un ou des points d'inflexion ? Si oui, lesquels ? La dérivée seconde ne s'annulant pas, la courbe de f ne présente pas de point d'inflexion.

Exercice 2 — 12,5 points

12,5 pts On donne la fonction g définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x^2-9x+3}{x-2}$.

1 Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction g.

✍ En $-\infty$, on écrit $g(x)=\dfrac{4x^2-9x+3}{x-2}=\dfrac{x^2\left(4-\frac{9}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=x\times\dfrac{\left(4-\frac{9}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-\frac{9}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=4\\ \lim\limits_{x\to-\infty}1-\frac{2}{x}=1\end{array}\right\}\quad \text{Par quotient } \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(4-\frac{9}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=4, \text{ comme } \lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty}$$

✍ En $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\frac{9}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=4\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{2}{x}=1\end{array}\right\}\quad \text{Par quotient } \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4-\frac{9}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=4, \text{ comme } \lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty}$$

2 Déterminer les limites à gauche et à droite en 2 de la fonction g.

✍ En 2^+ ; on utilise l'écriture $g(x)=(4x^2-9x+3)\times\dfrac{1}{x-2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^+}(4x^2-9x+3)=1\\ \lim\limits_{x\to2^+}x-2=0^+\quad\text{Par inverse }\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty\end{array}\right\}\quad\text{Par produit }\lim_{x\to2^+}g(x)=+\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to2^+}g(x)=+\infty}$$

✍ En 2^- ; on utilise l'écriture $g(x)=(4x^2-9x+3)\times\dfrac{1}{x-2}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-}(4x^2-9x+3)=1\\ \lim\limits_{x\to2^-}x-2=0^-\quad\text{Par inverse }\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{x-2}=-\infty\end{array}\right\}\quad\text{Par produit }\lim_{x\to2^-}g(x)=-\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to2^-}g(x)=-\infty}$$

3 La courbe de g admet-elle des asymptotes ? Si oui lesquelles ?

$\lim\limits_{x\to2^+}g(x)=+\infty$, donc la droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à C_g.

4 Calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de g. Dresser le tableau de variations de g.

g est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

$g=\dfrac{u}{v}$ d'où $g'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$:

$\left\{\begin{array}{ll}u(x)&=4x^2-9x+3\\ v(x)&=x-2\end{array}\right.$ ainsi : $\left\{\begin{array}{ll}u'(x)&=8x-9\\ v'(x)&=1\end{array}\right.$

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{(8x-9)(x-2)-1\times(4x^2-9x+3)}{(x-2)^2}\\&=\frac{8x^2-16x-9x+18-4x^2+9x-3}{(x-2)^2}\\&=\frac{4x^2-16x+15}{(x-2)^2}\end{aligned}$$

Comme le dénominateur est un carré qui est toujours positif, la dérivée a le signe de $4x^2-16x+15$ $\Delta=b^2-4ac=256-4\times4\times15=16$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16+4}{8} = \frac{5}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16-4}{8} = \frac{3}{2}$$

$4x^2-16x+15$ est un trinôme du second degré qui a pour racines $\frac{5}{2}$ et $\frac{3}{2}$; il a donc le signe de $a=4$ à l'extérieur des racines et celui de $-a$ à l'intérieur.

On déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	11	$\nearrow$	$+\infty$

5 La courbe représentative de g admet-elle des tangentes horizontales ? Si oui, en quel(s) point(s) ?
La courbe représentative de g présente deux points avec des tangentes horizontales ; ce sont les points $A\left(\frac{3}{2};3\right)$ et $A\left(\frac{5}{2};3\right)$

Exercice 3 — 0 point

On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ par les expressions $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x+\frac{3}{4}$et $g(x)=\sqrt{3x-2}+1$.
On note $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ leurs courbes représentatives respectives.

1 Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et des axes du repère.

Les points de $\mathcal{C}_f$ ont pour coordonnées $(x;f(x))$ avec $x\in\mathbb{R}$.
Ces points sont aussi sur l'axe des abscisses si $f(x)=0 \iff f(x)=\frac{1}{4}x^2+x+\frac{3}{4}=0 \iff x^2+4x+3=0$.
Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta=4^2-4\times3=4=2^2>0$ et admet donc deux racines distinctes $x_1=\frac{-4-2}{2}=-3$ et $x_2=\frac{-4+2}{2}=-1$.

Il y a donc deux points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses, dont les coordonnées sont $(-3;0)$ et $(-1;0)$.

2 Dresser le tableau de variation de f. Préciser les limites en l'infini.
f est une fonction trinôme du second degré, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x)=\frac{1}{2}x+1$. On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x^2\left(1+\frac{1}{4x}+\frac{3}{x^2}\right) = +\infty$ par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{4x}+\frac{3}{x^2}\right) = 1$.
Et de même en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

On a de plus le minimum, $f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^2 + (-2) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$.

3 Etudier la limite de g en $+\infty$.

En $+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x-2 = +\infty$ et, comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, par composition des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x-2} = +\infty$, et donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

4 Etudier les variations de g.
g est définie sur $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ et est dérivable sur $\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.
On a $g = \sqrt{u}+1$, avec $u(x) = 3x-2$, donc $u'(x) = 3$,
et alors $g' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, soit $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$.
En particulier, pour tout $x \in \left]\frac{2}{3};+\infty\right[$, $g'(x) > 0$, et donc g est strictement croissante sur $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$.

5 Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

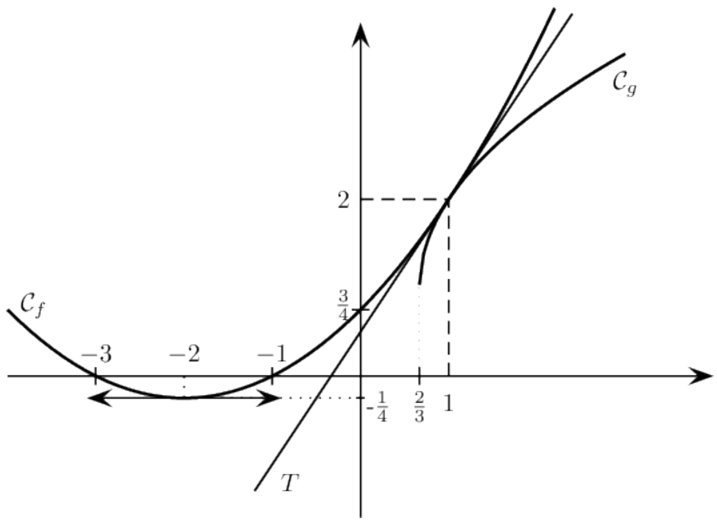
6 On dit que deux courbes sont tangentes en un point lorsque, en ce point, les deux courbes ont la même tangente. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont tangentes au point d'abscisse 1.

Au point d'abscisse $a = 1$, l'équation de la tangente T_f à $\mathcal{C}_f$ est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, avec $f(1) = \frac{1}{4}1^2 + 1 + \frac{3}{4} = 2$ et $f'(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.
Ainsi $T_f : y = \frac{3}{2}(x-1) + 2$.

De même, l'équation de la tangente T_g à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $a = 1$ est $y = g'(1)(x-1) + g(1)$, avec $g(1) = \sqrt{3\times1-2}+1 = 2$ et $g'(1) = \frac{3}{2\sqrt{3\times1-2}} = \frac{3}{2}$, soit $T_g : y = \frac{3}{2}(x-1) + 2$.

Ces deux courbes sont donc bien tangentes au point d'abscisse $a = 1$.

7 Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère en utilisant tous les résultats précédents.



Exercice 4 — 3 points

3 pts Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 5u_n + 4$.

Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $u_n > 0$ ».

- ***Initialisation :***
  $u_0 = 2$ et $2 > 0$ Donc la propriété est vraie au rang 0.
- ***Hérédité :*** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $u_k > 0$.(HR)
  On en déduit que $5u_k > 0$ en mutiplant par $5 > 0$
  Puis en ajant 4, $5u_k + 4 > 4 > 0$
  Ainsi $u_{k+1} > 0$, car $u_{k+1} = 5u_k + 4$.
- ***Conclusion :*** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n, on a « $u_n > 0$ ».

Exercice 5 — 4,5 points

4.5 pts Déterminer les limites suivantes en a :

1 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 1}$; $a = -\infty$.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 1} = \frac{x^2\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Par somme } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{2}{3}$$

2 $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 9}$; $a = 3$.

On étudie le signe du dénominateur :

- $x^2 - 9 = 0 \iff (x - 3)(x + 3) = 0 \iff x = \pm 3$
- En appliquant la règle sur le signe du trinôme, on obtient :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
signe de $(9 - x^2)$		-	0	+	0	-	

On observe que x^9 change de signe en 3, on sépare donc les deux cas :

✗ En 3^+ :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^+} x^2 - 5x + 7 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} 9 - x^2 = 0^- \quad \text{Par inverse} \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{9 - x^2} = -\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit} \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

✗ En 3^- :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} x^2 - 5x + 7 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} 9 - x^2 = 0^+ \quad \text{Par inverse} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{9 - x^2} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Par produit} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$$

3 $f(x) = \left(x\sqrt{x} + 2\right) \times \dfrac{-2}{x + 4}$; $a = +\infty$.

On écrit $f(x) = -2 \times \dfrac{x\sqrt{x} + 2}{x + 4} = -2 \times \dfrac{x\sqrt{x}\left(1 + \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)}{x\left(1 + \frac{4}{x}\right)} = -2\sqrt{x} \times \dfrac{\left(1 + \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)}{\left(1 + \frac{4}{x}\right)}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -2\sqrt{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(1 + \frac{2}{x\sqrt{x}}\right)}{\left(1 + \frac{4}{x}\right)} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Par produit} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Exercice 6 — 4,5 points

4.5 pts Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1 $f(x) = (-5x + 2)^4$

$f = u^4$ donc $f' = 4u^3u'$, ici $u(x) = -5x + 2$, donc $u'(x) = -5$.

$f'(x) = 4(-5x + 2)^3 \times (-5) = -20(-5x + 2)^3$

$$\boxed{f'(x) = -20(-5x + 2)^3}$$

2 $g(x) = \dfrac{2x + 3}{4x + 5}$

$f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$:

$\begin{cases} u(x) &= 2x + 3 \\ v(x) &= 4x + 5 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 2 \\ v'(x) &= 4 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(4x + 5) - 4(2x + 3)}{(4x + 5)^2} \\ &= \frac{8x + 10 - 8x - 12}{(4x + 5)^2} \\ &= \frac{-2}{(4x + 5)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2}{(4x + 5)^2}}$$

3 $h(x) = (3x + 2)\mathrm{e}^{-2x}$

f est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables. $f = uv$, d'où $f' = u'v + v'u$ avec pour tout réel x, dans D_f : $\begin{cases} u(x) &= 3x + 2 \\ v(x) &= \mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) &= 3 \\ v'(x) &= -2\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$ car $(e^u)' = u'e^u$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-2x}(3x + 2) \\ &= \mathrm{e}^{-2x}(3 - 2(3x + 2)) \\ &= \mathrm{e}^{-2x}(3 - 6x - 4) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-6x - 1)\mathrm{e}^{-2x}}$$