

Nom : Prénom :	DS 02 CASE DES MATHS	TMATHS 01/2020 Oct. 2020 Devoir n° 05 .../...
-------------------------------	---	--

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**
 Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1

5,5 points

5.5 pts

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.

On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint.

La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

Pour un nombre entier naturel n , on note T_n la température en degré Celsius du four au bout de n heures écoulées à partir de l'instant où il a été éteint. On a donc $T_0 = 1\,000$ et pour tout entier n $T_{n+1} = 0,82T_n + 3,6$.

- 1** Déterminer la température du four, arrondie à l'unité, au bout de 4 heures de refroidissement.

On cherche T_4 .

On peut programmer la suite (T_n) à l'aide de la calculatrice. Pour $n = 4$ on trouve :

$$T_4 \approx 463 \text{ °C}$$

- 2** Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$.

Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$ ».

Initialisation :

$$980 \times 0,82^0 + 20 = 980 \times 1 + 20 = 1\,000 \text{ et } T_0 = 1\,000.$$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $T_k = 980 \times 0,82^k + 20$. (HR)

$$\begin{aligned}
 T_{k+1} &= 0,82T_k + 3,6 \\
 &= 0,82(980 \times 0,82^k + 20) + 3,6 && \text{d'après (HR)} \\
 &= 980 \times 0,82^k \times 0,82 + 20 \times 0,82 + 3,6 \\
 &= 980 \times 0,82^{k+1} + 20
 \end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n , on a « $T_n = 980 \times 0,82^n + 20$ ».

- 3** Etudier la monotonie de la suite (T_n) .

Pour tout entier n , on a :

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} - T_n &= 980 \times 0,82^{n+1} + 20 - (980 \times 0,82^n + 20) \\
 &= 980 \times 0,82^{n+1} - 980 \times 0,82^n \\
 &= 980 \times 0,82^n \times 0,82 - 980 \times 0,82^n \times 1 \\
 &= 980 \times 0,82^n \times (0,82 - 1) \\
 &= \underbrace{-0,18}_{<0} \times \underbrace{980 \times 0,82^n}_{>0}
 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout entier n , on a $T_{n+1} - T_n < 0$.

La suite (T_n) est strictement décroissante.

4 Au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

La suite des températures est strictement décroissante et :

$$\begin{cases} T_{14} \approx 81 > 70 \\ T_{15} \approx 69,9 < 70 \end{cases}$$

Le four peut être ouvert sans risque pour les céramiques au bout de 15 heures.

Exercice 2

9 points

9 pts

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

1 Montrer que $u_1 = 4$ et calculer u_2 et u_3 .

$$\hookrightarrow u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$\hookrightarrow u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 4 + 5 = 9$$

$$\hookrightarrow u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 9 + 7 = 16$$

$$u_1 = 4; u_2 = 9; u_3 = 16$$

2 Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

Pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, d'où on déduit $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$.

Or ici n désigne un entier naturel $n \geq 0$, puis $2n \geq 0$, donc $2n + 3 \geq 3 > 0$.

On a donc Pour tout entier n , on a : $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

3 Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.

Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $u_n > n^2$ ».

$\hookrightarrow$ **Initialisation :**

$u_0 = 1$ et $0^2 = 0$, or on a bien $1 > 0$, ainsi $u_0 > 0^2$. Donc la propriété est vraie au rang 0.

$\hookrightarrow$ **Hérédité :** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $u_k > k^2$. (HR)

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\ u_k &> k^2 && \text{d'après (HR)} \\ u_k + 2k + 3 &> k^2 + 2k + 3 && \text{en ajoutant } 2k + 3 \\ u_{k+1} &> k^2 + 2k + 3 && \\ u_{k+1} &> k^2 + 2k + 1 && \\ u_{k+1} &> (k+1)^2 && \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ **Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n , on a « $u_n > (n+1)^2$ ».

- 4 En déduire l'existence du rang p à partir duquel pour tout entier naturel $n \geq p, u_n > 390$
 Comme $u_n > n^2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
 Ainsi pour tout réel $A > 0$, il existe un rang p tel que $u_p > A$.

En particulier pour $A = 390$, il existe un rang p tel que $u_p > 390$.

- 5 Complétons l'algorithme ci-dessous, soit en langage Python, soit en langage courant :



Algorithme Python 1

```
1 def recherche():
2   # Renvoie l'indice du terme qui dépasse 390
3   u=1
4   n=0
5   while u<=390 :
6       n=n+1
7       u=u+2*n+3
8   return n
9
```



Pseudo Code

Fonction Recherche() :
 Renvoie l'indice du terme qui dépasse 390
 $u \leftarrow 1$
 $n \leftarrow 0$
 Tant que $u \leq 390$ Faire
 $n \leftarrow n + 1$
 $u \leftarrow u + 2n + 3$
 Renvoyer n

- 6 Résoudre l'inéquation $u_n > 390$ avec la calculatrice en expliquant la démarche.

On a d'après l'inégalité suivante : $u_{20} > 20^2$, donc $u_{20} > 400 > 390$.

Or la suite (u_n) est strictement croissante, donc pour tout $n \geq 20$, on a $u_n \geq u_{20} > 390$. Par ailleurs en programmant la suite (u_n) sur une calculatrice, $u_{18} = 361$ et $u_{19} = 400$.

$$u_n > 390 \iff n \geq 19$$

- 7 Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .

$$\text{On conjecture } u_n = (n+1)^2$$

- 8 Démontrer la propriété conjecturée .

Montrons par récurrence sur n la propriété $\pi(n)$: « $u_n = (n+1)^2$ ».

✎ **Initialisation :**

$$u_0 = 1 \text{ et } 1^2 = 1$$

Donc la propriété est vraie au rang 0.

✎ **Hérédité :** soit $k \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $u_k = (k+1)^2$. (HR)

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + 2k + 3 \\ &= (k+1)^2 + 2k + 3 && \text{d'après (HR)} \\ &= k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k+2)^2 \end{aligned}$$

✎ **Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc le principe de récurrence s'applique et donc pour tout entier n , on a « $u_n = (n+1)^2$ ».



Exercice 3

8 points

8 pts

Déterminer la limite des suites suivantes :

- 1 Pour tout entier naturel $n, u_n = \frac{2n-5}{n^2+3}$

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{2n-5}{n^2+3} \\
 &= \frac{n\left(2-\frac{5}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} \\
 &= \frac{1}{n} \times \frac{2-\frac{5}{n}}{1+\frac{3}{n^2}}
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2 Pour tout entier naturel n , $v_n = 11n - 8 + (-0,4)^n$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (11n - 8) &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,4)^n &= 0 \quad \text{car } -1 < -0,4 < 1 \end{aligned} \right\} \text{ Par somme } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

3 Pour tout entier naturel n , $w_n = \frac{\sin(n)-5}{n+4}$ (un encadrement sera nécessaire)

$$\text{On écrit } w_n = \frac{\sin(n)-5}{n+4} = \frac{\sin(n)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} - \frac{5}{n+4} = \frac{\sin(n)}{n} \times \frac{1}{1+\frac{4}{n}} - \frac{5}{n+4}$$

Ayant pour tout entier n : $-1 \leq \sin n \leq 1$,
en divisant par $n > 0$ dès que $n \geq 1$, on obtient :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{Comme } \left\{ \begin{aligned} &-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\ &\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ &\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0 \end{aligned} \right. \text{ le théorème des gendarmes s'applique : } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\sin(n)}{n} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\sin(n)}{n} = 0 \\ &\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{n}} = 1 \end{aligned} \right\} \text{ par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} \times \frac{1}{1+\frac{4}{n}} = 0 \quad \left\{ \begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} \times \frac{1}{1+\frac{4}{n}} = 0 \\ &\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{5}{n+4} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ par somme } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$$

4 Pour tout entier naturel n , $x_n = \frac{2^n - 5}{4^n + 11}$

$$\begin{aligned}\frac{2^n - 5}{4^n + 11} &= \frac{2^n \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{4^n \times \left(1 + \frac{11}{4^n}\right)} \\ &= \frac{2^n}{4^n} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + 11 \times -\left(\frac{1}{4}\right)^n} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + 11 \times -\left(\frac{1}{4}\right)^n}\end{aligned}$$

Comme $-1 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, on déduit :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + 11 \times -\left(\frac{1}{4}\right)^n} = 1 \end{array} \right\} \text{ Par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

5 Pour tout entier naturel n , $y_n = \left(\frac{3}{n} - 4\right)(-n^2 + 4)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n} - 4\right) = -4 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 + 4) = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par produit } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\infty$$

Exercice 4

2 points

2 pts Un rallye mathématique propose 12 énigmes numérotées de 1 à 12. La classe doit choisir et répondre à 7 énigmes exactement.

1 Combien de choix différents la classe peut-elle faire ?

La classe doit choisir un ensemble de 7 énigmes parmi 12.

$$\text{Il y a donc } \binom{12}{7} = 792 \text{ façons de choisir 7 énigmes parmi 12.}$$

2 Combien de choix lui reste-t-il si les élèves sont certains de ne pas traiter les énigmes 5 à 7 incluses ?

La classe doit choisir un ensemble de 7 énigmes parmi 9.

$$\text{Il y a donc } \binom{9}{7} = \binom{9}{9-7} = \binom{9}{2} = 36 \text{ façons de choisir 7 énigmes parmi 12.}$$

3 Combien de choix lui reste-t-il si les élèves sont certains de traiter les énigmes 4 et 11 ?

La classe choisit donc les énigmes 4 et 11. Il lui reste donc à choisir un ensemble de 5 énigmes parmi les 10 questions qui restent.

$$\text{Il y a donc } \binom{10}{5} = 252 \text{ façons de choisir 7 énigmes parmi 12 sachant qu'on a retenu la 4 et la 11.}$$

 Exercice 5*1,5 point*

1.5 pt

- 1** Déterminer le nombre d'anagrammes du mot TOUAREG.

Une anagramme du mot TOUAREG s'obtient en permuttant les 7 lettres de ce mot.

Il y a donc $7! = 5040$ anagrammes du mot TOUAREG.

- 2** Déterminer le nombre d'anagrammes du mot HIBOU qui commence par une consonne.

Notons A l'ensemble des anagrammes du mot HIBOU commençant par une consomme.

$$\text{Card}(A) = \underbrace{2} \times \underbrace{4!} = 2 \times 24 = 48$$

Choix de la première lettre : une consonne H ou B Choix des 4 lettres suivantes

Il y a donc 48 anagrammes du mot HIBOU commençant par une consonne.