Nom : .... Prénom :	**DS 01** CASE DES MATHS	TMATHS3 Sept. 2020 Devoir n° 02 .../...

*Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises**.*
Le barème est approximatif. La calculatrice en mode examen est autorisée.

Attention ! Le sujet est recto-verso.

Exercice 1 — 3 points

3 pts Un restaurateur propose un menu : **Entrée + Plat + Dessert**
On choisit l'entrée parmi 4 entrées, le plat parmi 3 plats et le dessert parmi 5 desserts.

1 Déterminer le nombre de choix de menus différents en justifiant. (Écrire le calcul).

On a 4 choix pour l'entrée, à chacun de ces choix correspondent 3 choix pour le plat et 5 choix pour le dessert donc d'après le principe multiplicatif :

$$N = 4 \times 3 \times 5 = 60$$

Donc on a 60 menus différents.

2 A 13h15, il n'y a plus qu'un seul dessert. Quel est alors le nombre de choix de menus différents ?

On a 4 choix pour l'entrée, à chacun de ces choix correspondent 3 choix pour le plat et 1 choix pour le dessert donc d'après le principe multiplicatif :

$$N' = 4 \times 3 \times 1 = 12$$

Donc à 13h15, on a 12 menus différents.

Exercice 2 — 4,5 points

4.5 pts Soit $E = \{a; b; c; d; e; f; g\}$

1 Donner deux exemples de 3-uplets.

$(a; b; c)$ et $(b; e; f)$ par exemple.

2 Déterminer le nombre d'arrangements de 3 éléments de E.

Ill y a $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ arrangements de 3 éléments de E.

3 Donner 2 permutations possibles de E.

I(a ; b ; c ; d ; e ; f ; g) et (a ; c ; b ; d ; e ; f ; g) par exemple.

4 Déterminer le nombre de permutations de E.

Il y a $7! = 5040$ permutations de E.

5 Donner deux parties à 4 éléments de E.

$\{a;b;c;d\}$ $\{a;c;e;g\}$ par exemple

6 Donner le nombre de parties de 4 éléments de E .

Il y a autant de parties de E que de combinaisons de 4 éléments choisis parmi 7, soit $\binom{7}{4} = 35$

Exercice 3 — 3 points

3 pts

Avec un jeu de 32 cartes (4 couleurs : carreau, coeur, pique, trèfle et 8 valeurs : 7,8,9,10, V, D, R et As), on distribue des « mains »de 4 cartes (chaque joueur a 4 cartes) .

1 Combien de « mains » existe-t-il ?

Choisir une main c'est choisir une combinaison de 4 cartes parmi les 32, il y a donc $\binom{32}{4} = 35\,960$ mains possibles.

Il y a donc 35960 mains de 4 cartes.

2 Quel est le nombre de mains où il y a 3 coeurs ?

Notons A l'ensemble des mains où il y a 3 coeurs :

$$\mathrm{Card}(A) = \underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{Choix de 3 cartes coeurs parmi les 8 coeurs}} \times \underbrace{24}_{\text{Choix d'une carte parmi les 24 non coeurs}} = 56 \times 24 = 1\,344$$

Parmi les 35960 mains de 4 cartes, 1 344 contiennent 3 coeurs exactement.

3 Quelle est la probabilité d'avoir 4 as ?

Une seule main sur l'ensemble des mains contient 4 as,

la probabilité d'avoir 4 as est donc $p = \dfrac{1}{35\,960}$.

Exercice 4 — 4,5 points

4.5 pts

1 Simplifier l'écriture suivante : $\dfrac{(n+5)!}{(n+7)!}$.

$$\begin{aligned}\frac{(n+5)!}{(n+7)!} &= \frac{(n+5)!}{(n+7)(n+6)(n+5)!}\\ &= \frac{1}{(n+7)(n+6)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{(n+5)!}{(n+7)!} = \frac{1}{(n+7)(n+6)}}$$

2 Ecrire ce nombre à l'aide de factorielles : $A = \dfrac{9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}$.

$$\begin{aligned}A &= \frac{9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}\\ &= \frac{9!}{6!\times4!}\end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{9!}{6!\times4!}}$$

3 Calculer « à la main » $\dbinom{5}{3}$ en écrivant les calculs.

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\times(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2!} == \frac{5\times4}{2} = 10$$

$$\boxed{\binom{5}{3} = 10.}$$

4 En vous servant de $\dbinom{7}{3} = 35$ et $\dbinom{7}{4} = 35$,donner $\dbinom{8}{4}$.

D'après la relation de Pascal, $\dbinom{8}{4} = \dbinom{7}{3} + \dbinom{7}{4} = 35 + 35 = 70$

$$\boxed{\binom{8}{4} = 70.}$$

5 Démontrer que : $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$. (démonstration du cours)

$$\begin{aligned}\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}\\ &= \frac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!}+\frac{n!}{p!(p+1)(n-p-1)!}\\ &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p}+\frac{1}{p+1}\right)\\ &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{p+1}{(p+1)(n-p)}+\frac{(n-p)}{(p+1)(n-p)}\right)\\ &= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{n+1}{(p+1)(n-p)}\right)\\ &= \frac{n!(n+1)}{p!(p+1)(n-p-1)!(n-p)}\\ &= \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!}\\ &= \binom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

Exercice 5 Un peu de tout sur les suites — 5 points

5 pts On donne les suites suivantes : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$, $v_n = \dfrac{7n-1}{n+2}$ $w_n = 5n-4$

1 Calculer u_1, u_2 et u_3 en détaillant les calculs.

- $u_{0+1} = 2u_0 - 4 = 2\times 2 - 4 = 0\,;\ u_1 = 0$
- $u_{1+1} = 2u_1 - 4 = 2\times 0 - 4 = -4\,;\ u_2 = -4$
- $u_{2+1} = 2u_2 - 4 = 2\times(-4) - 4 = -12\,;\ u_2 = -12$

$$\boxed{u_1 = 0; u_2 = -4 \text{ et } u_2 = -12.}$$

2 Donner v_{n+1} en fonction de n.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{7(n+1)-1}{(n+1)+2}\\ &= \frac{7n+6}{n+3}\end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{7n+6}{n+3}}$$

3 Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ? Justifier.

On a $v_n = f(n)$ où $f(x) = \dfrac{7x+6}{x+2}$,

f est dérivable sur $]-2;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$f = \dfrac{u}{v}$ d'où $f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ avec pour tout réel x, dans : $\begin{cases} u(x) & = 7x - 1 \\ v(x) & = x + 2 \end{cases}$ ainsi : $\begin{cases} u'(x) & = 7 \\ v'(x) & = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{7(x+2) - 1(7x-1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{7x + 14 - 7x + 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{15}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Clairement $f'(x) > 0$ sur $]-2; +\infty[$.
Ainsi f est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$.

$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc strictement croissante .}}$

4 Quelle est la nature de la suite (w_n)? Justifier.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 5(n+1) - 4 - (5n - 4) \\ &= 5n + 5 - 4 - 5n + 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ayant pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = 5, \text{ on déduit que } (w_n) \text{ est arithmétique de raison5.}}$

5 Si (t_n) est la suite arithmétique de de premier terme $t_0 = 5$ et de raison $r = \frac{1}{3}$

a. Donner les 5 premiers termes de la suite (t_n).

- Le premier terme est $t_0 = 5$.
- Le second terme est $t_1 = t_0 + \frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$.
- Le $3^{\text{ième}}$ terme est $t_2 = t_1 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} = \frac{17}{3}$.
- Le $4^{\text{ième}}$ terme est $t_3 = t_2 + \frac{1}{3} = \frac{17}{3} + \frac{1}{3} = \frac{18}{3} = 6$.
- Le $5^{\text{ième}}$ terme est $t_4 = t_3 + \frac{1}{3} = 6 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3}$.

$$\boxed{t_0 = 5, t_1 = \frac{16}{3}, t_2 = \frac{17}{3}, t_3 = 6, t_4 = \frac{19}{3}}$$

b. Exprimer t_n en fonction de n.

Comme (t_n) est arithmétique :

$$\begin{aligned} t_n &= t_0 + nr \\ &= 5 + \frac{1}{3}n \end{aligned}$$

$$\boxed{t_n = 5 + \frac{1}{3}n}$$

c. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n.

$$\boxed{t_{n+1} = t_n + \frac{1}{3}.}$$