

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. **Faites des phrases claires et précises.**  
 Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Les suites en action!

### Exercice 1

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$

- 1** Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- 2**
  - a.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , démontrer que  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ .
  - b.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , démontrer que  $-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^3} \leq -\frac{1}{(n+1)}$
- 3** Montrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ .
- 4** En déduire que  $(u_n)$  est convergente.

### Exercice 2

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

#### Partie A : Conjecture

- 1** Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2** Donner une valeur approchée à  $10^{-5}$  près des termes  $u_3$  et  $u_4$ .
- 3** Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite  $(u_n)$ .

#### Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$ , par :  
 $v_n = u_n - 3$ .

- 1** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$ .
- 2** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq v_n \leq 0$ .
- 3**
  - a.** Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} - v_n = -v_n \left( \frac{1}{2}v_n + 1 \right)$ .
  - b.** En déduire le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .
- 4** Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite  $(v_n)$  converge?
- 5** On note  $\ell$  la limite de la suite  $(v_n)$ .

On admet que  $\ell$  appartient à l'intervalle  $[-1 ; 0]$  et vérifie l'égalité :  $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$ .

Déterminer la valeur de  $\ell$ .

- 6** Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées?\*