Nom :	**DM 01**	TMATHS3 *Oct. 2020*
Prénom :		*Devoir n° 03* .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises.***
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Découvrir la méthode de la représentation en escalier d'une suite pour conjecturer sa convergence.

Exercice 1

Partie 1

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (x-2)e^{-x} + 2$.

1. Effectuer une étude complète la fonction f sur $[0;+\infty[$: variations, limites aux bornes, tangente(s) horizontale(s), asymptote(s),? On présentera les résultats dans un tableau de variations.
2. Représenter dans un repère la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$. On prendra 5 cm pour 1 unité sur les deux axes.

Partie 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout entier $n, u_{n+1} = (u_n - 2)\,e^{-u_n} + 2$. On a ainsi pour tout entier $n, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Pour cette question, on complètera dans le repère de la partie 1 et on laissera tous les traits de construction :
   - Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
   - En utilisant la courbe représentative de la fonction f, placer $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
   - Placer alors u_1 sur l'axe des abscisses. On s'aidera de la droite d'équation $y = x$.
   - En utilisant la courbe représentative de la fonction f, placer $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
   - Placer alors u_2 sur l'axe des abscisses. On s'aidera de la droite d'équation $y = x$.
   - Poursuivre de la même manière pour placer u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.
2. Quelle conjecture permet d'établir la construction précédente ?

Partie 3

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, on a : $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire la preuve du résultat conjecturé dans la partie 2.
4. Ecrire un algorithme qui donne le plus petit entier N tel que $1,99999 \leq u_N$. Quel est cet entier ? On recopiera l'algorithme.