Nom :	**DM 01**	TMATHS3 Oiselet — *Oct. 2020*
Prénom :		*Devoir n° 03* — .../...

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. ***Faites des phrases claires et précises***.
Le barème est approximatif. La calculatrice est autorisée.

Découvrir la méthode de la représentation en escalier d'une suite pour conjecturer sa convergence.

Exercice 1

Partie 1

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (x-2)e^{-x} + 2$.

1 Effectuer une étude complète la fonction f sur $[0;+\infty[$: variations, limites aux bornes, tangente(s) horizontale(s), asymptote(s),? On présentera les résultats dans un tableau de variations.

- ✎ Dérivée : $f = uv + 2$, donc $f' = u'v + v'u$.

$$\begin{cases} u(x) &= x-2 \\ v(x) &= e^{-x} \end{cases} \quad \text{ainsi : } \begin{cases} u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= -e^{-x} \end{cases}$$

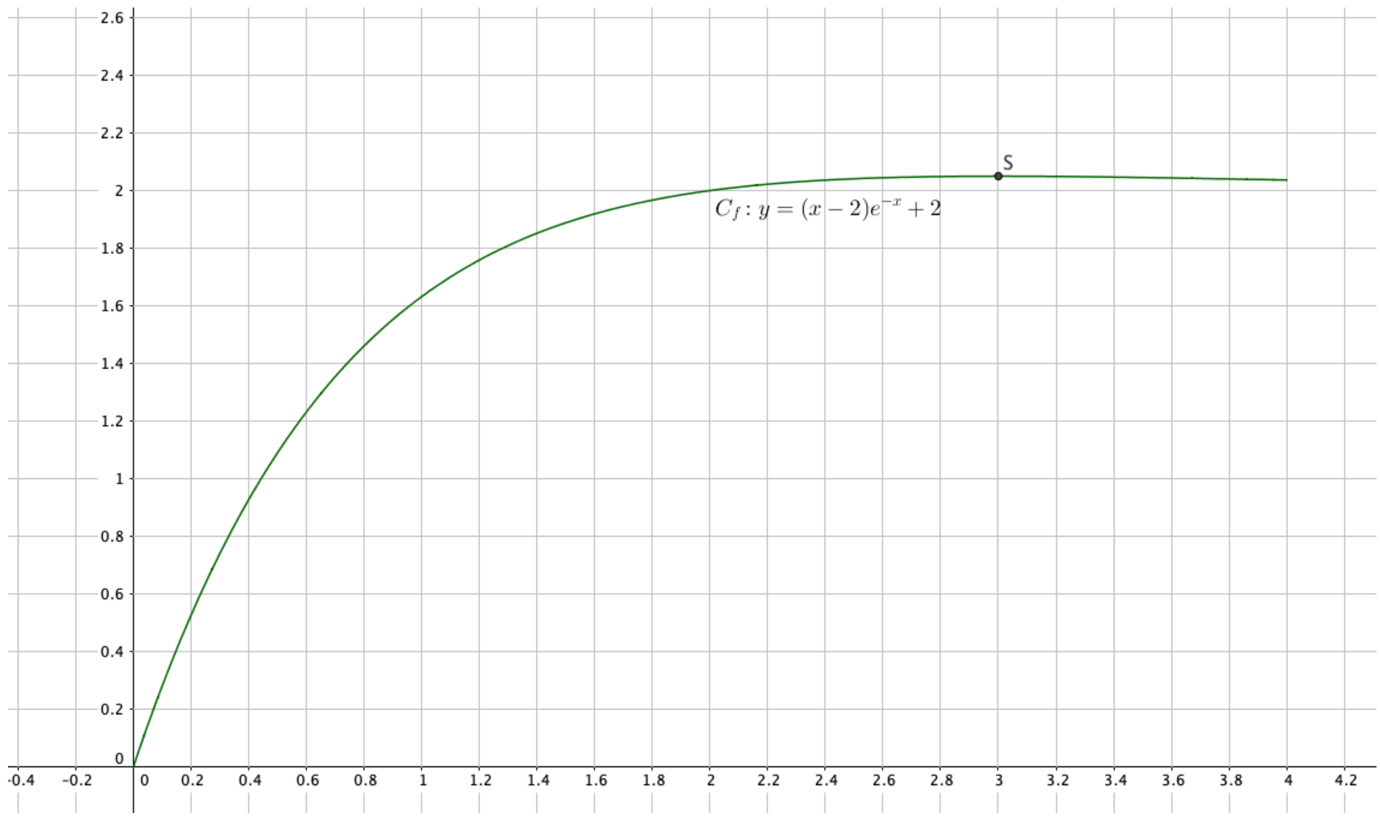
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1e^{-x} + (-e^{-x})(x-2) \\ &= e^{-x}(1-x+2) \\ &= (3-x)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = (3-x)e^{-x}}$$

- ✎ Signe de la dérivée :
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x, on a $e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $(3-x)$.
  - $f'(x) = 0 \iff 3-x = 0 \iff x = 3$.
  - $f'(x) > 0 \iff 3-x > 0 \iff -x > -3 \iff x < 3$.
- ✎ Tableau de variation :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$2+e^{-3}$	↘	2

2 Représenter dans un repère la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,4]$. On prendra 5 cm pour 1 unité sur les deux axes.

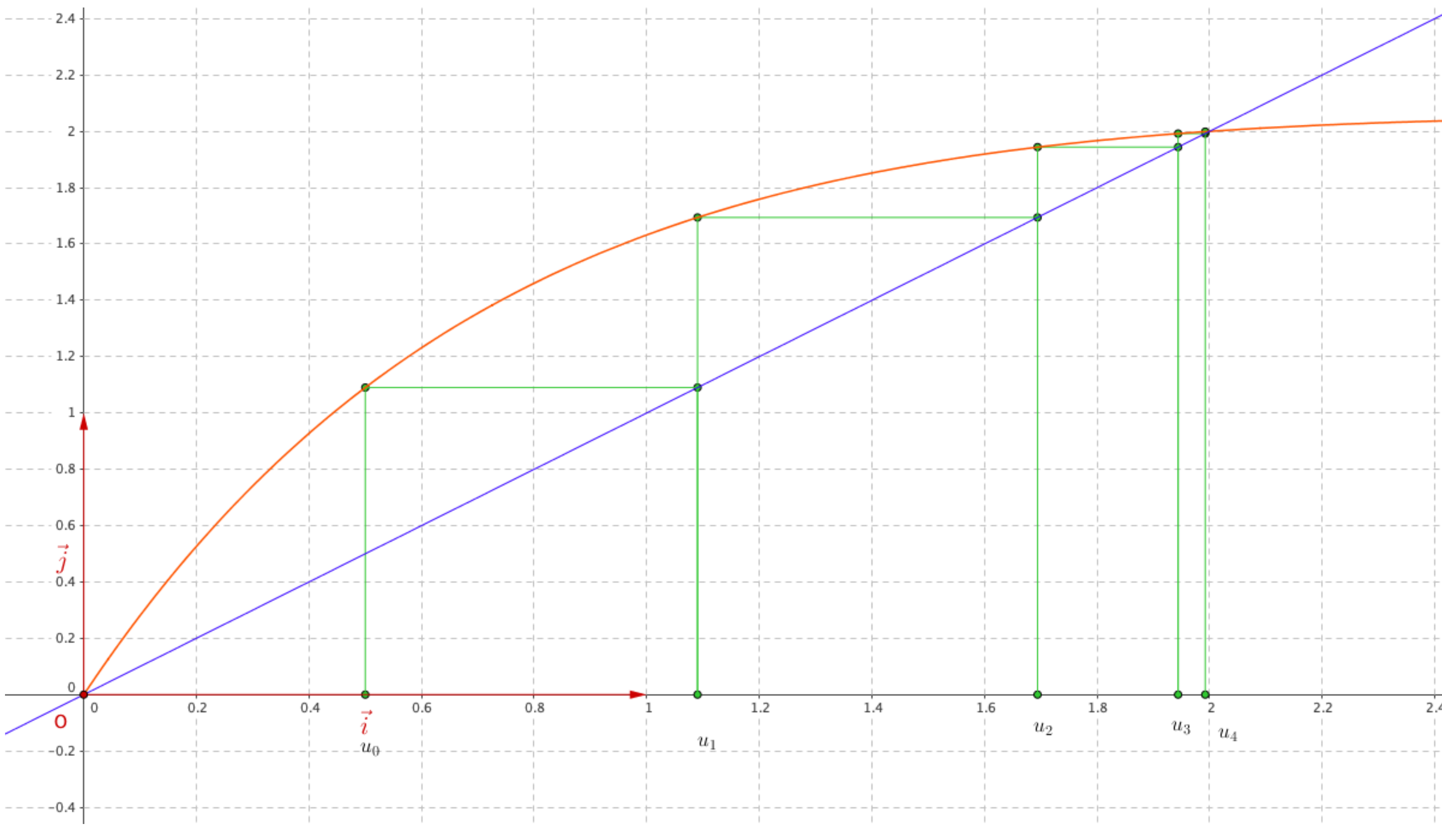


Partie 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout entier $n, u_{n+1} = (u_n - 2)e^{-u_n} + 2$. On a ainsi pour tout entier $n, u_{n+1} = f(u_n)$.

1 Pour cette question, on complètera dans le repère de la partie 1 et on laissera tous les traits de construction :

- Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- En utilisant la courbe représentative de la fonction f, placer $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
- Placer alors u_1 sur l'axe des abscisses. On s'aidera de la droite d'équation $y = x$.
- En utilisant la courbe représentative de la fonction f, placer $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
- Placer alors u_2 sur l'axe des abscisses. On s'aidera de la droite d'équation $y = x$.
- Poursuivre de la même manière pour placer u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.



2 Quelle conjecture permet d'établir la construction précédente ?
Au vu de la construction, on conjecture que la suite (u_n) est croissante majorée par 2 l'abscisse du point d'intersection de C et de la droite $\Delta : y = x$.
Par ailleurs les termes de (u_n) semblent s'accumuler autour de 2. On conjecture donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Partie 3

1 Démontrer par récurrence que pour tout entier n, on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

Notons $\pi(n)$ la propriété « $0 \leq u_n \leq 2.$ »

- *Initialisation*
  On a $u_0 = 0,5$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
- *Hérédité*
  Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_k \leqslant 2$; par croissance de la fonction f sur $[0 ; 2]$, on a
  $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(2)$ ou car $f(0) = 0$ et $f(2) = 2$,
  $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$: la relation est donc vraie au rang $k+1$.
- *Conclusion* : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque k il est vrai au rang suivant $k+1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel $n, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

2 Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
Notons $Q(n)$ la propriété « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2.$ »

- *Initialisation*
  On a $u_0 = 0,5$, et $u_1 = (u_0 - 2)e^{-u_0} + 2 = -1,5e^{-0,5} + 2 \approx 1,09$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
- *Hérédité*
  Supposons que pour un certain $k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$; par croissance de la fonction f sur $[0 ; 2]$, on a
  $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(2)$ ou car $f(0) = 0$ et $f(2) = 2$,
  $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2$: la relation est donc vraie au rang $k+1$.

- *Conclusion* : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque k il est vrai au rang suivant $k+1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel n, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc croissante.}}$$

3 En déduire la preuve du résultat conjecturé dans la partie 2.
La suite (u_n) est donc croissante majorée par 2, d'après le théorème de la convergence monotone, toute suite croissante majorée est convergente, donc (u_n) est convergente.

4 Ecrire un algorithme qui donne le plus petit entier N tel que $1,99999 \leq u_N$. Quel est cet entier ? On recopiera l'algorithme.

Algorithme

```python
# Devoir à la maison n°1 TMATHS3
from math import*
def f(x):
        y=(x-2)*exp(-x)+2
        return y

n=0
u=0.5
while u<1.99999:
        u=f(u)
        n=n+1
print(n,u)
```

En éxécutant cet algorithme sous Python, on obtient :

$$\boxed{n = 8 \text{ et } u \approx 1.9999972,\ 8 \text{ est donc le plus petit entier } N \text{ vérifiant } 1,99999 \leq u_N.}$$